

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ПРИКЛАДНАЯ  
ИНФОРМАТИКА  
№ 1, 2019**

**SYSTEM ANALYSIS  
AND APPLIED  
INFORMATION SCIENCE  
No 1, 2019**



**Международный  
Научно-технический журнал**

Издается с декабря 2012 года

**Учредитель**

Белорусский национальный  
технический университет

**Главный редактор**

Сергей Васильевич Харитончик

**Редакционная коллегия**

В. Ф. Голиков (зам. главного редактора),  
В. А. Богущ, Т. В. Борботко, В. Б. Байбурин (РФ),  
Д. Ю. Большаков (РФ), Л. С. Герасимович, Н. Н. Гурский,  
Ю. М. Захарик, И. А. Каляев (РФ), Г. О. Кипиани (Грузия),  
Э. Г. Лазаревич, В. А. Липницкий, А. А. Лобаты, В. А. Мищенко, Е. И. Никифорович (Украина),  
А. А. Прихожий, И. А. Сатиков, В. В. Старовойтов,  
П. П. Урбанович, А. Патрин (Польша),  
Ю. Н. Петренко (ответственный секретарь),  
Н. Н. Ташатов (Казахстан), А. В. Чигарев, Д. К. Щеглов (РФ)

**International  
Science and Technique Journal**

Published since December, 2012

**Founder**

Belarusian National Technical  
University

**Editor-in-chief**

Sergei V. Kharytonchyk

**Editorial board**

V. Golikov (deputy editor-in-chief), V. Bogush,  
T. Borbotko, V. Baiburin (RF), D. Bolshakov (RF), N. Gurskiy,  
L. Gerasimovich, J. Zaharik, I. Kalyaev, G. Kipiani (Georgia),  
E. Lazarevich, V. Lipnitsky, A. Lobaty, V. Mishchenko,  
E. Nikiforovich (Ukraine), A. Prihozhy, I. Satikov,  
V. Starovoytov, P. Urbanovich, A. Patrin (Poland),  
Y. Petrenko (executive secretary), N. Tashcatov  
(Kazakhstan), A. Chigarev, D. Shcheglov (RF)

Журнал включен в "Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований".

Журнал включен в международные каталоги и базы данных:

- ❖ Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)
- ❖ Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU
- ❖ Электронно-библиотечная система (ЭБС) издательства Лань
- ❖ DOAJ <https://doaj.org/toc/2414-0481>
- ❖ Google Scholar
- ❖ Киберленинка

- ❖ EBSCO
- ❖ BASE Search
- ❖ OpenAIRE
- ❖ WorldCat
- ❖ OpenDOAR
- ❖ ROAR

**Содержание**

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ**

Давыдовский А. Г., Линник А. М.

Системный анализ и математическое моделирова-  
ние дорожно-транспортных происшествий в мега-  
полисе .....

Сеньков А. Г., Гируцкий И. И., Грищенко А. Б.

Математическая модель накопления молока в вы-  
мени коровы .....

**РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА  
И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Pei Ping, Петренко Ю. Н.

Алгоритм 3d-навигации мобильного робота в сре-  
де промышленного интернета вещей на основе  
5d-мобильной коммуникации .....

**Contents**

**SYSTEM ANALYSIS**

Davidovsky A. G., Linnik A. M.

The system analysis and mathematical modeling road  
accidents in the metropolis .....

Senkov A. G., Girutski I. I., Grischenko A. B.

Mathematical model of milk secretion in a cow's  
udder .....

**ROBOTS, MECHATRONICS AND ROBOTIC  
SYSTEMS**

Pei Ping, Yury N. Petrenko

Mobile robot navigation path algorithm in 3d industrial  
internet of thing (iot) environment based on 5g mobile  
communication .....

**УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМИ  
ОБЪЕКТАМИ****Арефьев Н. Н.**

Фильтр Калмана для оптимального получения координат беспилотных летательных аппаратов .....

**Лобатый А. А., Радкевич А. С.**

Пошаговая нечеткая коррекция алгоритма фильтрации случайных сигналов .....

**Маркевич В. Э., Легкоступ В. В.**

Аналитическое проектирование устройства управления ракетой для перехвата аэродинамической цели .

**Стрижнев А. Г., Шихов А. А.**

Способы редуцирования моделей объектов управления, содержащих колебательные и форсирующие звенья.....

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ПРИНЯТИЕ  
РЕШЕНИЙ****Кудрявцев В. И., Зирко О. Ф.**

Возможности применения расчета теории очередей с целью управления в реальном времени .....

**ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ****Тимофеев А. М.**

Влияние времени однофотонной передачи информации на достоверность ее приема в квантово-криптографическом канале связи .....

**MANAGEMENT OF TECHNICAL OBJECTS****Arefyev N. N.**

Filter Kalman for solving the problem of coordinates unmanned aerial vehicles .....

**Lobaty A. A., Radkevich A. S.**

Stepwise fuzzy correction of the algorithm filters of random signals.....

**Markevich V. E., Legkostup V. V.**

Analytical design of the missile control device to intercept aerodynamic target .....

**Stryzhnev A., Shykhau A.**

Methods of reduction of control objects models containing oscillating and forcing links .....

**DATA PROCESSING AND DECISION-MAKING****Kudriavtsev V. I., Zirko O. F.**

The possibility of applying calculation based on queuing theory with the aim of real-time control .....

**INFORMATION SECURITY****Timofeev A. M.**

The influence of the time of single photon transmission of information on the reliability of its reception in a quantum cryptographic communication channel .....

**Ответственный секретарь редакции**

Петренко Ю. Н.

**Технический редактор**

Лакин В. И.

**Адрес редакции**ул. Франциска Скорины 25/3, Минск, 220114,  
Республика Беларусь  
Тел. +375 17 267-66-84  
e-mail: CA\_PI@bntu.by**Executive secretary of the editorial board**

Y. Petrenko

**Technical Editor**

V. Lakin

**Editorial board address**25/3 Franciska Skariny str., Minsk, 220114,  
Republic of Belarus  
Tel. +375 17 267-66-84  
e-mail: CA\_PI@bntu.byСвидетельство о государственной регистрации средства массовой информации № 1540  
от 08.06.2012, выданное Министерством информации Республики Беларусь

Подписано в печать 00.00.2019. Формат бумаги 60×84 1/8. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 100 экз. Заказ 960.

Отпечатано в БНТУ. ЛП № 02330/74 от 03.03.2014.

220013, г. Минск, пр. Независимости, 65.

© Системный анализ и прикладная информатика, 2019

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ**

**SYSTEM ANALYSIS**

УДК 625.7.8:656.13.05

*ДАВЫДОВСКИЙ А. Г., ЛИННИК А. М.*

## **СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ В МЕГАПОЛИСЕ**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,  
Минск, Беларусь*

*Представлены результаты корреляционного анализа причин дорожно-транспортных происшествий в условиях современного мегаполиса, как г. Минск. Выявлены наиболее частые причины дорожно-транспортных происшествий, включая наезды на пешеходов по вине водителей (23,7%), столкновение на перекрестках (11,7%), инциденты на регулируемых (12,2%) и нерегулируемых (16,3%) пешеходных переходах, а также на проезжей части (43,34%). Исследована зависимость транспортных инцидентов от времени суток, дня недели и месяца года. Показаны периоды, когда дорожно-транспортные инциденты происходят с 3.00 до 6.00 ч, с 15.00 до 18.00, а также с 21.00 до 24.00 в понедельник, пятницу и воскресенье в январе, марте, июне, сентябре, октябре и ноябре. Методы корреляционного и множественного регрессионного анализа могут быть основой превентивного управления безопасностью дорожного движения в условиях современного мегаполиса.*

**Ключевые слова:** дорожно-транспортные происшествия, математическое моделирование, корреляционный анализ, множественный регрессионный анализ, системный анализ.

### **Введение**

Ежегодное увеличение интенсивности дорожного движения сопровождается возрастанием нагрузки на дорожно-транспортную инфраструктуру современных городов, которая с каждым годом все хуже справляется со своими функциями. Как следствие – увеличивается частота заторов в улично-дорожной сети городов и количество дорожно-транспортных происшествий (ДТП) [1, 2]. В этой связи решение проблемы обеспечения безопасности дорожного движения относится сегодня к наиболее приоритетным задачам развития страны. В то же время по объективным причинам улично-дорожная сеть крупных населенных пунктов не может быть модернизирована в столь сжатые сроки как количественно, так и качественно [3].

**Целью работы** является системный анализ статистических данных и разработка математических регрессионных моделей, характеризующих динамику дорожно-транспортных происшествий в условиях современного мегаполиса (на примере г. Минска).

### **Регрессионные модели динамики дорожно-транспортных происшествий**

Для системного анализа и прогнозирования риска ДТП целесообразно рассматривать техническое состояние транспортных средств, дорожного полотна, погодноклиматические факторы и поведение человека. Погодные условия, включая атмосферное давление, влажность, скорость ветра, концентрацию кислорода, могут негативно сказываться на способности человека управлять транспортными средствами. К факторам, связанным с транспортным средством, относятся: выбор способа передвижения, размеры и массу транспортных средств, мощность двигателя и скоростные характеристики, техническое состояние и оборудование транспортных средств [4]. Факторы внешней среды включают время суток, погодные условия, состояние дорожного покрытия, загруженность транспортного потока, проведение дорожно-ремонтных работ. Дорожные факторы включают качество дорожного покрытия, дорожную инфраструктуру. К факторам, тесно связанным с человеком в процессе дорожного

движения, относятся: опыт вождения, психофизиологическое состояние, общий уровень соматического здоровья и т. д. Анализ статистики ДТП в г. Минске в период с 2012 по 2017 гг. включительно свидетельствует, что в большинстве случаев виновником ДТП являются водители, превышающие скорость, нарушающие правила дорожного движения, в частности, при проезде перекрестков, пешеходных переходов и процессе маневрирования. Причем в Республике Беларусь доля таких ДТП составляет около 75%, тогда как в некоторых странах она доходит до 90% [3, 5].

Системный анализ статистических данных о ДТП был выполнен с помощью инструментов процессора «Excel 2013» из пакета «Microsoft Office for Windows 10». При этом из системного анализа были исключены наиболее очевидные причины ДТП, такие как техническая неисправность транспортных средств, управление транспортным средством в состоянии алкогольного опьянения, нетрезвое состояние пешеходов, выезд на встречную полосу, неподчинение сигналам и дорожным знакам, нарушение проезда перекрестков, нарушение проезда пешеходных переходов, переутомление и сон за рулем, переход в неустановленном месте, выход из-за стоящего транспортного средства, переход на запрещающий сигнал, управление транспортным средством.

Анализ ДТП в период с 01.01.2012 г. по 31.12.2017 г. (на примере г. Минска) свидетельствует, что наибольший ущерб, связанный с ДТП, обусловлен гибелью и/или ранениями участников. В частности, в период с 01.01.2012 по 31.12.2017 год органами внутренних дел Мингорисполкома было зафиксировано более 5000 ДТП, включая наезды на пешеходов (36,4%), в т. ч. по вине водителей (23,7%), случаи опрокидывания транспортных средств (1,2%), наезды на препятствие (3,9%), столкновение с ударом сзади (8,04%), столкновение на перекрестке (11,7%), столкновение лобовое (2,3%), столкновение попутное (3,6%), наезд на стоящее транспортное средство (1,06%), наезд на велосипедиста (2,5%), прочие случаи, включая падение в салоне средств общественного транспорта (5,6%). Необходимо отметить, что ДТП происходили на регулируемых (12,2%) и нерегулируемых (16,3%) пешеходных переходах, на остановках общественного транспорта

(3,9%), регулируемых (11,2%) и нерегулируемых (8,1%) перекрестках, на мостах и путепроводах (0,3%), в жилой зоне, включая местный проезд, дворовую территорию (4,7%), а также на проезжей части (43,3%) улично-дорожной сети городов [1]. Наиболее часто тяжелые ДТП, сопровождающиеся гибелью участников, происходили в период 3.00–6.00 ч. (коэффициент корреляции  $r^2 = 0,89$ ;  $P < 0,02$ ), 12.00–15.00 ( $r^2 = 0,72$ ;  $P < 0,05$ ), 15.00–18.00 ( $r^2 = 0,75$ ;  $P < 0,05$ ) и 21.00–24.00 ( $r^2 = 0,73$ ;  $P < 0,05$ ). Причем наиболее часто подобные ДТП происходили в понедельник ( $r^2 = 0,92$ ;  $P < 0,02$ ), среду ( $r^2 = 0,88$ ;  $P < 0,05$ ) и воскресенье ( $r^2 = 0,75$ ;  $P < 0,02$ ). Частота ДТП при управлении транспортными средствами коррелирует с временем года, в частности, с вероятностью происшествий в январе ( $r^2 = 0,68$ ;  $P < 0,05$ ), марте ( $r^2 = 0,65$ ;  $P < 0,02$ ), мае ( $r^2 = 0,68$ ;  $P < 0,05$ ), июне ( $r^2 = 0,78$ ;  $P < 0,02$ ), сентябре ( $r^2 = 0,82$ ;  $P < 0,05$ ), октябре ( $r^2 = 0,61$ ;  $P < 0,01$ ), ноябре ( $r^2 = 0,67$ ;  $P < 0,02$ ).

Также охарактеризована динамика интенсивности гибели участников ДТП в различные месяцы на протяжении года, которое показано на рисунке 1. Осуществлена аппроксимация показателей интенсивности гибели участников дорожных инцидентов (в единицах отношения количества случаев гибели к случаям ДТП в течение года) полиномиальной функцией 6-й степени. Получены уравнения полиномиальной аппроксимации (1–3) для минимальных, средних и максимальных показателей интенсивности гибели участников дорожных инцидентов:

$$P_{\text{дтп (мин)}} = 2E - 06x^6 - 5E - 05x^5 + 0,0002x^4 + 0,0033x^3 - 0,034x^2 + 0,1059x \quad (r^2 = 0,4753), \quad (1)$$

где  $x$  – порядковый номер месяца в году.

$$P_{\text{дтп (сред)}} = 4E - 06x^6 - 0,0002x^5 + 0,0022x^4 - 0,0142x^3 + 0,0379x^2 - 0,0145x \quad (r^2 = 0,5796). \quad (2)$$

$$P_{\text{дтп (макс)}} = 2E - 06x^6 - 8E - 05x^5 + 0,0012x^4 - 0,0088x^3 + 0,0279x^2 - 0,028x; \quad r^2 = 0,5154. \quad (3)$$

При этом был выделен период года с наибольшей интенсивностью гибели участников ДТП – с сентября по ноябрь включительно.

В дальнейшем была предложена математическая модель, характеризующая связь вероятности ДТП от месяца года на основе уравнения множественной линейной регрессии (4):

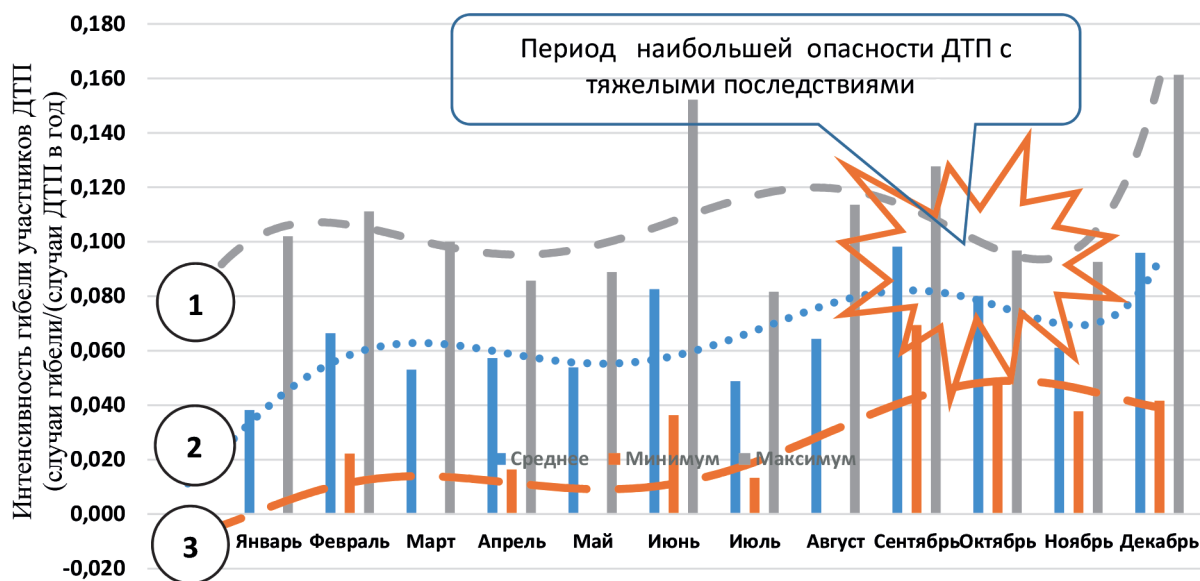


Рис. 1. Интенсивность гибели участников дорожно-транспортных происшествий в течение года

$$P_{\text{ДТП}} = 0,78P_{\text{февр}} - 0,62P_{\text{сент}} + 0,4P_{\text{ноябр}} + 0,43P_{\text{дек}}, (R^2 = 0,99; F = 0,067), \quad (4)$$

где  $R^2$  — коэффициент детерминации и  $F$ -критерий Фишера, которые характеризуют качество регрессионной модели.

Вероятность ДТП зависит от таких факторов, как неправильный выбор скорости (НВС), нарушение правил маневрирования (НПМ), нарушение правил проезда перекрестков (НППП), несоблюдение дистанции (НД), что выражено в уравнении (5):

$$P_{\text{ДТП}} = 0,21P_{\text{НВС}} + 0,21P_{\text{НПМ}} + 0,4P_{\text{НППП}} + 0,29P_{\text{НД}}, (R^2 = 0,99; F = 0,0147). \quad (5)$$

Вместе с тем, разработана математическая модель (6 и 7, характеризующая зависимость вероятности ДТП от вероятности происшествия в четверг (ЧТВ) пятницу (ПТЦ), субботу (СБТ) и воскресенье (ВСК):

$$P_{\text{ДТП}} = 0,059P_{\text{ЧТВ}} + 0,543P_{\text{ПТЦ}} + 0,18P_{\text{СБТ}} + 0,579P_{\text{ВСК}}, (R^2 = 0,99; F = 0,049), \quad (6)$$

или

$$P_{\text{ДТП}} = 0,4P_{\text{ПТЦ}} + 0,2895P_{\text{СБТ}} + 0,3P_{\text{ВСК}}, (R^2 = 0,99; F = 0,000476). \quad (7)$$

Вероятность ДТП с тяжелыми последствиями и гибелью участников может быть представлена математическими моделями (8 и 9), включая неправильный выбор скорости (НВС)

и нарушение дистанции (НД) и нарушение проезда перекрестков (НПП):

$$P_{\text{погиб}} = 2,8635P_{\text{НВС}} + 6,4367P_{\text{НД}}, (R^2 = 0,98; F = 0,000757), \quad (8)$$

а также:

$$P_{\text{погиб}} = 0,89P_{\text{НВС}} + 0,043P_{\text{НПП}}, (R^2 = 0,951; F = 0,0071). \quad (9)$$

Анализ предложенных множественных линейных регрессионных моделей свидетельствует о том, что дорожная ситуация в течение февраля и сентября оказывают наиболее значительное влияние на вероятность ДТП на протяжении года. При этом наиболее существенное значение в группе факторов, способствующих ДТП с тяжелыми последствиями и гибелью участников, имеют такие, как день недели — пятница и воскресенье, а также особенности поведения водителя при управлении транспортным средством — неправильный выбор скорости и нарушение дистанции между транспортными средствами.

### Заключение

На основе корреляционного анализа установлены основные причины ДТП (наезды на пешеходов по вине водителей (23,7%), столкновение на перекрестках (11,7%), инциденты на регулируемых (12,2%) и нерегулируемых (16,3%) пешеходных переходах, а также на проезжей части (43,34%). При этом чаще всего ДТП отмечены с 3.00 до 6.00 ч и с 15.00 до

24.00 в понедельник, среду пятницу и воскресенье в январе, марте, июне, сентябре, октябре и ноябре с учетом особенностей транспортного потока и улично-дорожной сети такого мегаполиса, как Минск. На основе предложенных моделей полиномиальной аппроксимации 6-й степени (1–3) и множественной линейной регрессии (4–9) может быть разработана информационная система анализа и прогнозиро-

вания риска развития ДТП. Прогнозирование риска дорожно-транспортных ситуаций с оценкой вероятных человеческих жертв и экономических потерь может быть осуществлено на основе широкого использования нейросетевых технологий [6, 7]. Системный анализ данных о ДТП является основой для превентивного управления безопасностью дорожного движения в условиях современного мегаполиса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Реализация** дорожно-транспортной политики в Республике Беларусь. Транспортный налог и его использование. Обеспечение безопасности дорожного движения. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mcrb.by/index.php/informatsiya/edinyj-den-informirovaniya/458-realizatsiya-dorozhno-transportnoj-politiki-v-respublike-belarus>. – Дата доступа: 20.03.2018.
2. **Что** влияет на безопасность в пути? – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://gaibrest.by/?p=9164> // – Дата доступа: 20.03.2018.
3. **Дорохин, С. В.** Профилактика безопасности дорожного движения как мера снижения чрезвычайных ситуаций на дорогах / С. В. Дорохин // Проблемы обеспечения безопасности при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций. – 2015. – Т. 1. – С. 303–307.
4. **Степченко, А. В.** Анализ основных факторов, влияющих на безопасность дорожного движения / А. В. Степченко // Наука без границ. – 2016. – № 3 – С. 24–28.
5. **Васильев А. П.** Состояние дорог и безопасность движения автомобилей в сложных погодных условиях. – М.: Транспорт, 2006. – 217 с.
6. **Терентьев, В. В.** Безопасность автомобильных перевозок: проблемы и решения / В. В. Терентьев // Надежность и качество сложных систем. – 2017, № 2 (18). – С. 90–94.
7. **Матросова Л. Д., Семенов Е. Ю.** Прогнозирование показателей безопасности дорожного движения на основе статистического анализа // Л. Д. Матросова, Е. Ю. Семенов // Среднерусский вестник общественных наук. – 2016. – Т. 11, № 3. – С. 55–60.

## REFERENCES

1. **Implementation** of road transport policy in the Republic of Belarus. Transport tax and its use. Ensuring road safety. – [Electronic resource.] – Mode of access: <http://www.mcrb.by/index.php/informatsiya/edinyj-den-informirovaniya/458-realizatsiya-dorozhno-transportnoj-politiki-v-respublike-belarus>. – Date of access: 20.03.2018.
2. **What** affects safety on the road? – [Electronic resource.] – Access mode: <http://gaibrest.by/?p=9164> // – access date: 20.03.2018.
3. **Dorokhin, S. V.** Prevention of road safety as a measure to reduce emergency situations on the roads. / S. V. Dorokhin // Problems of safety in the aftermath of emergencies. – 2015. – Vol. 1. – P. 303–307.
4. **Stepchenkov, A. V.** Analysis of the main factors affecting road safety / A. V. Stepchenkov // Science without borders. – 2016. – № 3. – P. 24–28.
5. **Vasiliev, A. P.** Road Condition and traffic safety in difficult weather conditions. – Moscow: Transport, 2006. – 217 p.
6. **Terentyev, V. V.** Road transport safety: problems and solutions / V. V. Terentyev // Reliability and quality of complex systems. – 2017, № 2 (18). – P. 90–94.
7. **Sailor, D.** Prediction of road traffic safety based on statistical analysis // D. L. Matrosova, E. Y. Semenov // Central Russian messenger of social Sciences. – 2016. – Vol. 11, № 3. – P. 55–60.

Поступила  
22.11.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

DAVIDOVSKY A. G., LINNIK A. M.

## THE SYSTEM ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELING ROAD ACCIDENTS IN THE METROPOLIS

*The article presents the results of correlation analysis of the causes of road accidents in such a modern metropolis as Minsk. Has been identified the most frequent causes of road accidents, including pedestrian collisions caused by drivers, collisions at intersections, incidents at controlled and unregulated pedestrian crossings, as well as on the roadway. The dependence of transport incidents on the time of day, day of the week and month of the year was investigated. Shows the periods when road traffic incidents occur from 3.00 to 6.00 h, from 15.00 to 18.00 and from 21.00 to 24.00 on Monday, Friday and*

*Sunday in January, March, June, September, October and November. Methods of correlation and multiple regression analysis can be the basis of preventive traffic safety management in a modern metropolis.*

**Keywords:** road accidents, mathematical simulation, correlation analysis, multiple regression analysis, system analysis.



**Давыдовский Анатолий Григорьевич**, доцент кафедры инженерной психологии и эргономики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, кандидат биологических наук, доцент. Область научных интересов: системный анализ и моделирование социотехнических и сложных систем. Автор более 100 научных и учебно-методических публикаций.

Почтовый адрес: 220119, г. Минск, улица Тикоцкого, дом 42, квартира 2.  
E-mail: agd2011@lisr.ru; мобильный телефон: + 375 29 504 08 69



**Линник Алексей Михайлович**, аспирант кафедры инженерной психологии и эргономики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: проблемы, перспективы и области приложения нейронных сетей.

E-mail: linnik93@gmail.com; мобильный телефон: + 375 29 208 87 69.

УДК (631.171:004.3):636.2.034 (043.3)

А. Г. СЕНЬКОВ, И. И. ГИРУЦКИЙ, А. Б. ГРИЩЕНКО

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ МОЛОКА В ВЫМЕНИ КОРОВЫ

Учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет»

*В работе предложена математическая модель, описывающая динамику метаболического процесса образования молока в вымени коровы в зависимости от значения промежутка времени, прошедшего с момента окончания последнего доения. Интенсивность процесса образования молока в вымени коровы, а, следовательно, и ее молочная продуктивность, зависит, в том числе, от оптимального выбора кратности доений в сутки с определенными интервалами времени между доениями. Предлагаемая модель позволит учитывать данные факторы при анализе и оптимизации условий содержания молочного стада крупного рогатого скота (КРС). Результаты исследований применимы при диагностике состояния коровы, при сравнительной оценке эффективности кратности доения и т. д. Коэффициент детерминации, при использовании в качестве модели аperiodического звена, составил 0,82. Преимуществом предлагаемого подхода к идентификации биологического объекта – коровы – является использование методики пассивного эксперимента на основе статистической обработки массивов экспериментальных данных по надоям, регистрируемых современными информационными системами управления стадом КРС на действующих молочно-товарных комплексах.*

### Введение

В информационном обеспечении молочного скотоводства развиты и широко применяются разнообразные модели лактационных кривых [1]. Как правило, такие модели связывают прогноз суточного надоя с фазой лактации (лактация – период выработки молока у коровы продолжительностью около 300 дней, начиная с даты последнего отела). Анализ литературы и реальных экспериментальных данных показывает, наряду с другими факторами, влияние на текущий надой промежутка времени между доениями и кратности доения [2, 3]. Так, зоотехническими исследованиями установлено [4], что скорость образования молока в вымени коровы неравномерна по времени: интенсивная секреция молока у коров наблюдается в течение 4 ч после очередного доения, а затем она уменьшается и постепенно прекращается через 10 ч. При этом исследование влияния промежутка времени между доениями на объем накопленного молока традиционно выполнялось методом активного эксперимента [2–4]: осуществлялись дойки коровы через разные промежутки вре-

мени и измерялось количество полученного молока. Однако проведение подобного активного эксперимента с биологическим объектом, каким является корова, имеет существенный недостаток, связанный с нарушением физиологического ритма животного, что может служить источником погрешности измерений. В то же время в Республике Беларусь функционируют большое число молочно-товарных комплексов с автоматизированными доильными залами и компьютеризированными системами управления стадом (СУС). В СУС в автоматическом режиме ведется регистрация данных по надоям. Структура регистрируемых данных обычно включает в себя следующие поля: номер коровы, номер дня в годовом цикле лактации (начиная с даты последнего отела), номер доения в течение суток (1 – утреннее, 2 – дневное, 3 – вечернее), полученный надой молока (кг), дата и время начала доения, длительность доения (с) и т. д. Пример структуры таблицы базы данных по доению, используемой в отечественном модуле управления доением «Майстар» [5], представлен в таблице.

Т а б л и ц а. Фрагмент и структура таблицы базы данных модуля управления доением «Майстар»

| Номер коровы | День лактации | Доение | Надой молока, кг | Дата     | Время начала доения | Длительность доения, с |
|--------------|---------------|--------|------------------|----------|---------------------|------------------------|
| 2            | 50            | 1      | 9,570            | 06.08.17 | 06:52:15            | 340                    |
| 2            | 50            | 2      | 3,593            | 06.08.17 | 13.05.15            | 303                    |
| 2            | 50            | 3      | 3,558            | 06.08.17 | 19.10.13            | 258                    |
| 2            | 51            | 1      | 9218             | 07.08.17 | 06:40:37            | 391                    |
| 2            | 51            | 2      | 3,571            | 07.08.17 | 13.06.15            | 280                    |
| 2            | 51            | 3      | 3104             | 07.08.17 | 18.43.49            | 253                    |
| 2            | 52            | 1      | 8,815            | 08.08.17 | 06:59:24            | 453                    |
| 2            | 52            | 2      | 4,097            | 08.08.17 | 13.16.44            | 276                    |
| 2            | 52            | 3      | 3940             | 08.08.17 | 18.50.11            | 266                    |
| ...          | ...           | ...    | ...              | ...      | ...                 | ...                    |

Таким образом, возникает возможность путем обработки больших массивов данных (для 1 коровы, при 305 днях лактации и трехразовом доении – 915 измерений; стадо – 200, 400 или 600 коров) в рамках пассивного эксперимента выполнить идентификацию математической модели метаболического процесса образования молока в вымени коровы.

В данной работе предложены математические модели, описывающие динамику образования молока в вымени в зависимости от времени, прошедшего с момента последнего доения. На основе статистического анализа экспериментальных данных по надоям коров выполнена оценка точности предложенных моделей.

### Основная часть

Теоретическое математическое описание процессов жизнедеятельности, происходящих в живых организмах, является весьма сложной задачей в силу ограниченности классического математического аппарата. В настоящее время для решения подобных задач все большую популярность приобретают методы нечеткой логики, нейронных сетей. Более традиционным подходом является использование динамически детерминированных моделей на основе так называемой, «модели серого ящика», когда структура модели задается априорно, исходя из определенных эмпирических соображений, а численные значения параметров модели определяются расчетным путем на основе данных экспериментов [1, 6, 7]. Примером такого подхода, в частности, является модель кривой лактации Вуда [1].

Сложность формализации коровы как биологического объекта синтеза молока заключается как в нестационарности величины суточ-

ных надоев молока в течение периода лактации, так и величины текущего разового надоя. Для рассматриваемого в данной работе процесса молокообразования в вымени коровы предлагается математическое описание скорости молокообразования в вымени в следующем виде:

$$v = \begin{cases} v_0, & y < y_{\max}, \\ 0, & y \geq y_{\max}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $v$  – мгновенное значение интенсивности процесса образования молока в вымени без учета инерционности физиологических реакций организма коровы, кг/ч.;  $v_0$  – интенсивность процесса образования молока до момента наполнения вымени, кг/ч.;  $y$  – количество молока в вымени, образовавшееся с момента окончания последнего доения, кг;  $y_{\max}$  – некоторое максимально допустимое количество молока в вымени (максимальная емкость), при достижении которого прекращается процесс дальнейшего образования молока, кг.

Таким образом, интенсивность процесса образования молока в вымени постоянна до тех пор, пока количество накопленного в вымени молока  $y$  меньше некоторого максимального значения  $y_{\max}$ . Для учета инерционности физиологической реакции организма коровы на опустошение вымени по окончании доения, а также на полное заполнение вымени и прекращение дальнейшего молокообразования в модель введено дополнительное апериодическое звено:

$$W_1(s) = \frac{F(s)}{V(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad (2)$$

где  $F(s) = L[\dot{y}(t)]$ ,  $V(s) = L[v(t)]$ ,  $L[...]$  – оператор изображения Лапласа;  $\dot{y}$  – скорость образования молока в вымени, кг/ч.;  $T_1$  – посто-

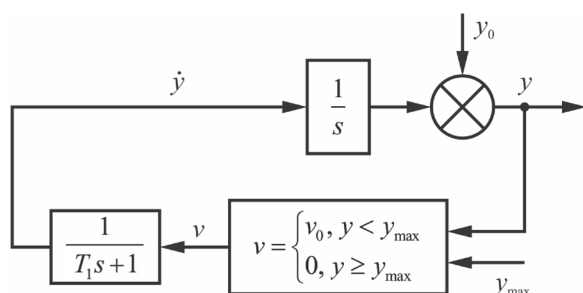


Рис. 1. Математическая модель интенсивности процесса образования молока в вымени коровы

янная времени, характеризующая инерционность возобновления процесса образования молока в вымени после окончания доения, а также прекращение дальнейшего образования молока при наполнении вымени до максимума, ч.

Операторному уравнению (2) соответствует дифференциальное уравнение:

$$T_1 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = v(t). \quad (3)$$

Структурная схема предлагаемой математической модели интенсивности процесса образования молока представлена на рис. 1. Значение  $y_0$  задает начальное условие – остаток молока в вымени коровы по окончании последнего доения. На практике обычно  $y_0 = 0,5$  кг [2–4].

Значения параметров модели  $T_1, y_{\max}$  определяются физиологическими особенностями данной конкретной коровы, ее уровнем молочной продуктивности и могут изменяться со временем от момента отела до окончания лактации. Численные значения параметров  $T_1, y_{\max}$  определялись на основе метода наименьших квадратов; в качестве целевой функции использовалась сумма квадратов отклонений  $N$  значений последовательных реальных надоев  $y^*$  от модели  $y$ :

$$z = \sum_{j=1}^N (y_j^* - y(t_j))^2 \rightarrow \min_{T_1, y_{\max}}. \quad (4)$$

Для упрощения и линеаризации представленной на рис. 1 математической модели вместо предположения (1) используем предположение о том, что скорость образования молока уменьшается по мере наполнения вымени пропорционально количеству накопленного в нем молока [2, 3], т. е.:

$$v(t) = k(y_{\max} - y_0 - y(t)), \quad (5)$$

где  $k$  – некоторый постоянный коэффициент, значение которого индивидуально для каждой конкретной коровы,  $1/\text{ч}$ .

В результате, с учетом выражения (3), получим:

$$T_2^2 \cdot \ddot{y}(t) + T_3 \dot{y}(t) + y(t) = y_{\max} - y_0, \quad (6)$$

где  $T_2 = \sqrt{\frac{T_1}{k}}$  ч.,  $T_3 = \frac{1}{k}$  ч. – постоянные времени.

Таким образом, динамика накопления молока в вымени коровы может быть описана типовым линейным апериодическим звеном 2-го порядка [7].

Значения параметров рассматриваемых моделей –  $y_{\max}, T_1, v_0, T_2, T_3$  могут быть определены численно по результатам регистрации значений фактических надоев  $y^*$  и промежутков времени  $t$  между доениями за последние  $N$  дней, например, за предшествующую неделю.

Результаты численной оценки адекватности предложенных математических моделей процесса образования и накопления молока представлены на рис. 2. Расчеты проведены на основании зарегистрированных данных о фактических надоях выбранной коровы за 7 последовательных дней при трехразовом доении в сутки (утром, в обед и вечером). На данном рисунке по оси абсцисс отсчитывается время, прошедшее с момента окончания каждого предыдущего доения, по оси ординат – количество молока, образующееся в вымени коровы по прошествии соответствующего интервала времени с момента окончания предыдущего доения. Маркерами на рис. 2 отмечены значения фактических зарегистрированных надоев молока. Кривая 1 соответствует модели (1) – (2), кривая 2 – модели (6). Соответствующие числовые значения параметров моделей равны:

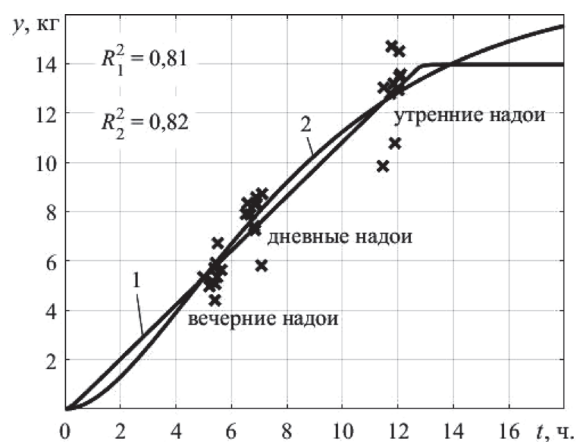


Рис. 2. Численная оценка адекватности рассматриваемых математических моделей интенсивности процесса образования молока

для модели (1) – (2):  $y_{\max} = 12,6$  кг,  $T_1 = 0,66$  ч,  $v_0 = 1,2$  кг/ч, коэффициент детерминации  $R_1^2 = 0,81$ ;

для аperiodического звена 2-го порядка (6):  $y_{\max} = 17$  кг,  $T_2 = 2,33$  ч,  $T_3 = 4,66$  ч, коэффициент детерминации  $R_2^2 = 0,82$ .

Таким образом, для целей прогнозирования единичного надоя от коровы с учетом интервала времени между последовательными доениями может быть использована математическая модель скорости молокообразования в виде аperiodического звена 2-го порядка (6).

На основе данных моделей разработаны метод динамической экспресс-оценки оптимальности выдерживаемых интервалов между доениями коровы с точки зрения повышения ее молочной продуктивности и имитационная модель сравнения эффективности двух- и трехкратного доения коров в условиях конкретного молочно-товарного комплекса с учетом дополнительных затрат.

### Заключение

Впервые обосновано применение математической модели накопления молока в вымени коровы в зависимости от времени, прошедшего с момента окончания предыдущего доения, в виде аperiodического звена 2-го порядка. Предложенные математические модели не про-

тиворечат зоотехническим данным. Использование методики пассивного эксперимента позволяет без нарушения физиологического ритма коровы получить необходимый набор данных прямо в условиях действующего производства. Идентификация значений параметров математической модели выполняется с использованием метода наименьших квадратов на основе фактических данных по надоям коровы, зарегистрированных за последние 7–10 дней. Разработанные модели оценки влияния промежутка времени между доениями на надой молочных коров, полученные путем обработки больших массивов данных с действующих СУС, позволяют решать ряд прикладных задач. Эти результаты могут быть использованы в многопараметрической модели идентификации животных [8]. Оценка отклонений реальной продуктивности коров от прогнозных модельных значений может быть положена в основу диагностики состояния животных, а также поддержания оптимальных параметров технологии кормления и содержания животных. Предложенная модель также может быть использована при технико-экономической оценке выбора кратности доения коров для конкретных производственных условий как при предпроектных расчетах, так и в условиях реальной молочно-товарной фермы или комплекса.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Thornley, J. H. M.** Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences / J. H. M. Thornley, J. France. – Wallingford, Oxfordshire, Cambridge, MA: CABI Pub, 2004.
2. **Лапотко, А. М.** Сколько раз? – 1, 2, 3, или 4... и в какой час выгодно доить корову / А. М. Лапотко, Н. И. Песоцкий // Наше сельское хозяйство. – 2010. – № 11. – с. 27–31.
3. **Лапотко, А. М.** Сколько раз? – 1, 2, 3, или 4... и в какой час выгодно доить корову / А. М. Лапотко, Н. И. Песоцкий // Наше сельское хозяйство. – 2010. – № 12. – с. 70–76.
4. **Марченко, Г.** Влияние содержания коров на их молочную продуктивность // Молочное и мясное скотоводство. – 1996. – № 2. – с. 6–8.
5. **Грищенко, А. Б.** Экспериментально-теоретические исследования средств идентификации дойных коров / А. Б. Грищенко, И. И. Гируцкий, А. Г. Сеньков // Механизация и электрификация сельского хозяйства: межведомственный тематический сборник. – Вып. 49. – Минск: НППЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства, 2015. – С. 173–178.
6. **Китиков, В. О.** Применение математических моделей лактационных кривых для эффективного планирования валового производства молока / В. О. Китиков, Е. В. Тернов // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2011. – № 1. – С. 68–73.
7. **Eykhoff, P.** System identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – London: John Wiley & Sons, 1974.
8. **Патент № 21661.** Республика Беларусь, МПК А 01К 11/00. Способ идентификации коровы в доильном зале / Грищенко А. Б., Гируцкий И. И., Сеньков А. Г.; заявитель и патентообладатель Учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет». – № а20150489; заяв. 13.10.2015; опуб. 28.02.2018, Бюл. № 1. – 84–85 с.

### REFERENCES

1. **Thornley, J. H. M.** Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences / J. H. M. Thornley, J. France. – Wallingford, Oxfordshire, Cambridge, MA: CABI Pub, 2004.

2. **Lapotko, A. M.** How many times? – 1, 2, 3, or 4... and in what time of the day is better to milk a cow / A. M. Lapotko, N. I. Pesotski // Our agriculture. – 2010. – № 11. – P. 27–31.
3. **Lapotko, A. M.** How many times? – 1, 2, 3, or 4... and in what time of the day is better to milk a cow / A. M. Lapotko, N. I. Pesotski // Our agriculture. – 2010. – № 12. – P. 70–76.
4. **Marchenko, G.** The effect of farm conditions on the level of cows' milk production // Journal of Dairy and Beef Cattle Farming. – 1996. – № 2. – P. 6–8.
5. **Grischenko, A. B.** Experimental and theoretical studies of means of identification of dairy cows / A. B. Grischenko, I. I. Girutski, A. G. Senkov // Mechanization and electrification of agriculture: interdepartmental thematic collection. – Issue 49. – Minsk: Scientific Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Agricultural Mechanization, 2015. – P. 173–178.
6. **Kitikov, V. O.** Application of a simulation model of lactation curves for effective planning of milk production / V. O. Kitikov, E. V. Ternov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series. – 2011. – № 1. – P. 68–73.
7. **Eykhoff, P.** System identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – London: John Wiley & Sons, 1974.
8. **Grischenko, A. B.** Sposob identifikacii korovi v doilnom zale [A method for identifying a cow in a milking parlor]. Patent BY, no. 21661. 2018.

Поступила  
03.01.2019

После доработки  
23.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

*SENKOV A. G., GIRUTSKI I. I., GRISCHENKO A. B.*

## MATHEMATICAL MODEL OF MILK SECRETION IN A COW'S UDDER

*Belarusian State Agrarian Technical University*

*The paper proposed a mathematical model that describes the dynamics of the physiological process of milk secretion in the cow's udder, depending on the value of the time interval that has passed since the end of the last milking. The intensity of this process, and, consequently, the cow's milk production level, depends, among other things, on the optimal choice of the multiplicity of milkings per day with certain time intervals between milkings. The proposed model will allow to take into account these factors in the analysis and optimization of conditions for the maintenance of dairy cattle herds. The results of the research are applicable in diagnosing the state of a cow, in a comparative assessment of the effectiveness of milking multiplicity, etc. The model's determination coefficient is 0.82 for the aperiodic link used as a model. The advantage of the proposed approach to the identification of a biological object – a cow – is the use of a passive experiment technique based on statistical processing of experimental data on yields recorded by modern information systems for the management of cattle on existing dairy farms.*



**Сеньков Андрей Григорьевич.** 220113, г. Минск, ул. Литературная, д. 22, кв. 1.  
Моб. тел. 8029 5046465, e-mail: sencov\_1981@tut.by  
Белорусский государственный аграрный технический университет, к. т. н.,  
доцент



**Гируцкий Иван Иванович,** 220025, г. Минск, ул. Есенина, д. 6, корп. 1, кв. 700.  
Моб. тел. 8029 3087244, e-mail: gir\_50@mail.ru.  
Белорусский государственный аграрный технический университет, д. т. н.,  
доцент



**Грищенко Андрей Борисович**, 220015, г. Минск, ул. Пономаренко, д. 32, кв. 176.

Телефон: + 375293669969, e-mail: [Andrey\\_gr1@mail.ru](mailto:Andrey_gr1@mail.ru).

Белорусский государственный аграрный технический университет, аспирант.

**РОБОТЫ,  
МЕХАТРОНИКА  
И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ  
СИСТЕМЫ**

**ROBOTS,  
MECHATRONICS AND  
ROBOTIC SYSTEMS**

PEI PING, YURY N. PETRENKO

## MOBILE ROBOT NAVIGATION PATH ALGORITHM IN 3D INDUSTRIAL INTERNET OF THING (IOT) ENVIRONMENT BASED ON 5G MOBILE COMMUNICATION

*Belarusian National Technical University*

*With the significant growth of the semiconductor industry, creating small devices with powerful processing ability and network capabilities are no longer a dream for engineers. Currently, Internet of Things (IoT) has become one of the hottest topics in both industry and academia of wireless communication field. The idea of the Internet of Things (IoT) is to connect every day physical objects such as microwave, doors, lightings and so on. The technical concept of the IoT is to enables these different physical objects to sense information using sensors and sends this information to a server. Industrial IoT is to integrate various technologies to improve business services in different sectors. It implicitly indicates the behavior of machine-to-machine communications. Each of industrial IoT as service domains has its own communication requirements that are measured differently in both such as reliability, Quality of service (QoS), and privacy. According to the development of industrial automation, the industrial Internet of things (IoT) is widely used in smart factories to capture the data and manage the production. One of the most important components of industrial IoT is the wireless sensor network (WSN), which are easy to deploy and use in indoor industrial environments for a lot of tasks, such as irrigation, machine condition monitoring, and environment monitoring. There are a lot of works focusing on the WSN in industrial IoT. For example, in, a WSN-based hidden Markov model is proposed to estimate the occupancy in the building (also see other works [1], [2]). In this paper, the research focus on 3-D mobile robot tracking in 5G wireless communication combine to sensor network and mobile robot path planning. The mobile robot can move fast in the three-dimensional (3-D) indoor industrial environment for many tasks such as the monitoring of possible damages on industrial plants [3], data gathering and transmission from wireless communication [4], transportation [5].*

### Introduction

The frequency bandwidth of information technology has already become too pricey, and with each passing day, they are becoming being extinct. Radio spectrum demand exponentially increasing after 2019, due to the rising desire from human being. The next generation wireless communication system considered as the one source of improved spectrum utilization, meet the needs of mobile robot in industrial Internet of Things (IoT) environment with explosive data growth [6]. Mobile robot in industrial IoT environment relies on the propagation of radio waves with large area coverage to transmit signals. A range of signals can be received by terminals in the same frequency band. Therefore, it is necessary to distinguish the information from different terminals especially in the applications of the industrial IoT which is a typical characteristic of data burst growth [7]. From the user view point the micro mobile robot characteristics of industrial IoT are displayed as a 3-D under actuated autonomous vehicle and wide-

ly used to describe industrial robots as an example shown in Fig 1, [8].

Accordingly, several kinematic model that are important to the operation of the industrial robot system are identified. These kinematic model include: considering the time delay involved by communications and global path planning, the antenna array structure combine to the characteristic of millimeter wave from 5G wireless communication to obtain a better stability and the optimal system performance [9, 10]. In the next sections a discussion will be related to the mobile robot is equipment with the sensor inertial measurement unit (IMU) with a communication technology. The mobile robot characteristics in industrial IoT environment depends mainly on the sensitivity received by the sensor and the wireless communication network time delay [11]. It is clear that the change in sensitivity has a strong effect on signal quality of the air channel and the capture image resolution of the access point to mobile robot in



Figure 1. 3-D indoor industrial environment robot moving track

industrial 3-D environment, but negligible effect on the baseband signal processing.

The 3-D kinematic characteristics of a mobile robot is the extension of the 2-D kinematic planar analysis. There is a IMU and a wireless communication device have equipped in mobile robot in this paper. Moreover, there is a successful navigation path algorithm has been designed with real 3-D robot [12]. The mobile robot in the 3-D industrial IoT space could be described as a Cartesian coordinate.

$$s(t) = x(t), y(t), z(t). \quad (1)$$

Figure 2 shows the Cartesian coordinates in (1) of mobile robot in industrial 3D environment.

Several important parameters which are used to characterize mobile robot in industrial IoT communication environment are discussed in the following sections as mentioned earlier. The motion of mobile robot in 3-D industrial space in mathematical equations could be described as (2).

$$\begin{cases} \dot{s} = v_r \vec{i}, \\ \dot{\vec{i}} = \vec{u}. \end{cases} \quad (2)$$

The  $U_M$  is the maximum value of the norm of the input of two degrees of freedom control vector, usually written as  $\|\vec{u}\| < U_M$ . The direction of robot's velocity is orthogonal to the input of two degrees of freedom control, it can be written as  $\vec{i} \perp \vec{u}$ . Moreover, according to IMU and the odometry data from wireless sensor feedback can ob-

tain mobile robot's location  $s(t)$  and the direction of robot's velocity  $\vec{i}(t)$ . However, the control input  $\vec{u}$  has a constraint in minimum turning radius of the mobile robot is necessary to be explored in this dissertation. The minimum turning radius can be defined as follow (3):

$$R_{\min} = \frac{v_r}{U_M} \quad (3)$$

In this paper assumed a closed set  $D$  with an arbitrary point in nation  $\rho$ , the safety distance range between  $D$  and  $\rho$  in minimum be written as (4)

$$d_s(D, \rho) := \min \|\rho - D\| \quad (4)$$

There is an initial torus, which is an extension of initial circle proposed in [13] for considering

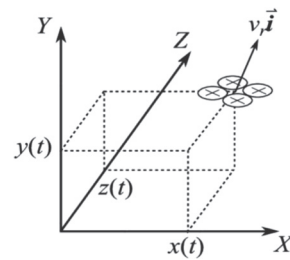


Figure 2. Mobile robot in 3D spatial coordinates where;  $s_i$  = the number of  $i$ th mobile robot's position;  $i$  = the current mobile robot's number;  $v_r$  = the speed of robot movement, it is a constant speed in this dissertation;  $R^3$  = Three-dimensional vector space;  $\vec{i}$  = the unit vector indicating the direction of robot's velocity,  $\vec{i} \in R^3$ ;  $\vec{u}$  = input of two degree of freedom control,  $\vec{u} \in R^3$ ;  $\dot{s}$  = Find the first derivative of the displacement;  $\dot{\vec{i}}$  = Find the first derivative of the unit vector of robot movement speed;  $U_M$  = The maximum value of the norm of the input of two degrees of freedom control  $\vec{u}$

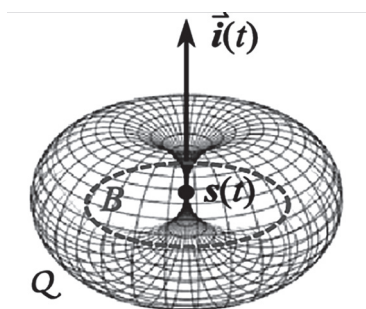


Figure 3. Composition of the minimum turning radius set B

the minimum turning radius. When there is a set B satisfies the (2.5) and (2.6) equations.

$$B = \{\rho \in R^3, (\rho - s) \perp \vec{i}, \|\rho - s\| = R_{\min}\} \quad (5)$$

$$Q := \{\rho \in R^3, d_s(B, \rho) := R_{\min}\} \quad (6)$$

The minimum turning radius can be found is shown on the circular dotted line below in Fig 3.

In an industrial IoT environment applications exists two different obstacle scenarios in different irregular shapes and dynamic velocities can be divided into static state and moving state (walls, other mobile robot, etc.) To ensure the reliability and timeliness of obstacle detection, we consider to deploy 5G massive MIMO antenna in millimeter wave communication for increase spatial information throughput while ensuring the directionality of information transmission combined with sensor network in the workspace. In Fig 4, each sensor acquisition terminal uses a 3-D range finder to measure the obstacle distance in different directions in ideal circumstances. There are two types of 3-D range finder in industrial applications commonly be used. The first type provides omnidirectional measurements of distance named spinning 2-D range finder [14], The second type only measures the distance based 3D capture hardware system design method in a limited field of view named time of flight (ToF) camera [15]. Assumption 2.1: The obstacle scenarios is static and obstacle's location is known.

The sensor nodes usually are fixed on the top of wall, ceilings. The received signal strength indicator (RSSI) is used for current WSN and flying robots estimating. Therefore, the locations of both the sensor nodes and the flying robots can be estimated based on RSSI [16]. Wireless sensor nodes in industrial IoT environment combine to

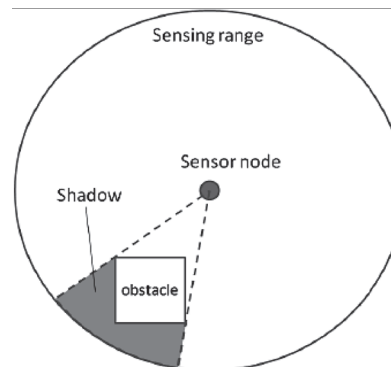


Figure 4. The range finder in industrial wireless sensor network environment

magnetic sensor and gravity sensor to obtain the attitude of each sensor node. Moreover, the mobile robots navigate algorithm is controlled by a central computer. The central computer could collect the real-time measurements of the obstacles rapidly from each 3-D range finder according to connects to one of the sensor nodes in industrial IoT 5G WSN communication environment. Then, the 3D-detection area topographic map of the unoccupied area will be build by central computer from measurements data value. Furthermore, the mobile robot in the industrial IoT workspace can communicate to the WSN. The mobile robot is controlled by the central computer via WSN. In practical implementations in industrial IoT environments is shown in Fig 5, the mobile robot uploads the sensor data to the central computer.

The structure of 5G WSN in Fig 5 consists of:

- 1) A central computer, representing central master control module, central processing module completes data processing and fusion for the data collection, analysis, and early warning from the industrial IoT environment,
- 2) A flying robot representing the electronic equipment operates reliably in industrial IoT environment,
- 3) A image sensor, is an optoelectronic device in photoelectric conversion function for convert-

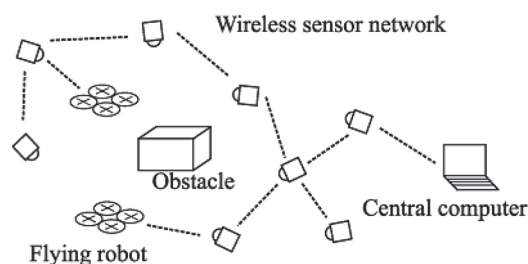


Figure 5. Structure of 5G WSN implementations in industrial IoT environments

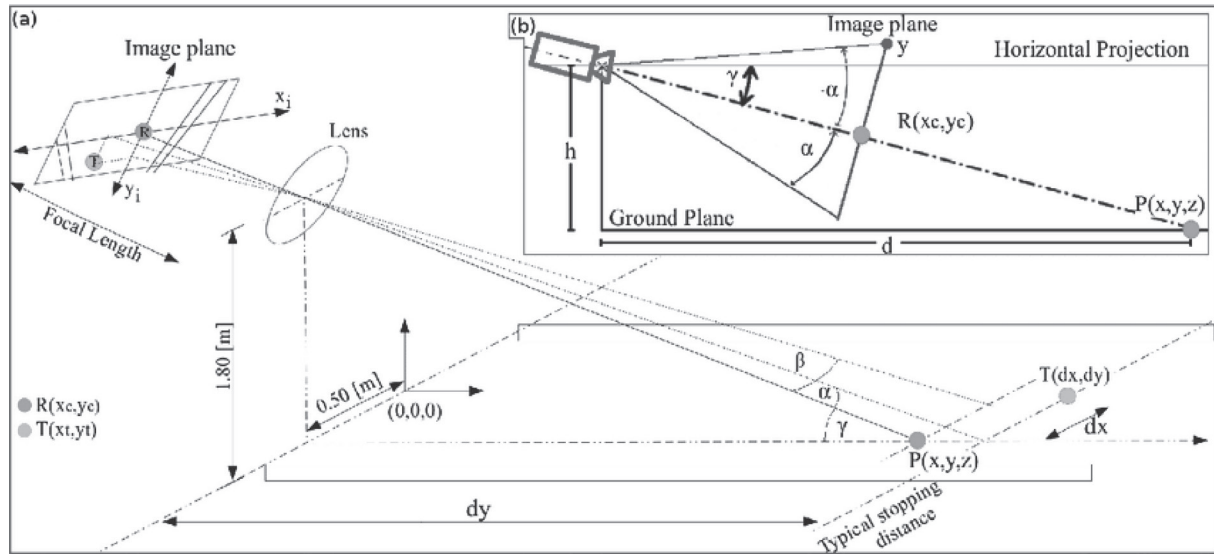


Figure 6. Wireless sensor node detects objects region

ing the light image on the photosensitive surface into an electrical signal.

4) A large number of image sensors form a wireless sensor network in a multi-hop or a mesh manner to collaborative obstacle perception, collect, process, and transmit the information from the perceived objects in the geographic area to central computer.

In the industrial environment, the sensor nodes detect the obstacles and mobile robot position. For any sensor node detects objects region can be written as  $N_i^t$ ,  $i$  is the image sensor's or mobile robot's number,  $t$  is the image sensor's perceived time. the image sensor's measurements could be converted from its local coordinate system with its location to the global coordinate system for a region  $N_i^t$ . Fig 6, (below) shows a detected region of the image sensor node in coordinate system.

The first definition gives the detected region  $N_i^t$  is a closed and continuous point set in the three-dimensional vector space  $R^3$  for any mobile robot's number  $i$  and image sensor's perceived time  $t$ . Let  $d_s$  is a constant in the second definition, the boundary of a closed set  $D$  can be expressed as  $\partial D$ . a set  $R[D, d_s]$  stand for the  $d$ -reduction of the closed set  $D$  defined as follow (7):

$$R[D, d_s] := \{ \rho \in D : d(\partial D, \rho) \geq d_s \} \quad (7)$$

Let a safety range  $d_s$  is a constant in the third definition, the set  $\varepsilon[D, d_s]$  is the  $d$ -enlargement of the closed set  $D$  defined as follow (8) and shows in Fig. 7.

$$\varepsilon[D, d_s] := \{ \rho \in R^3 : d(D, \rho) \leq d_s \} \quad (8)$$

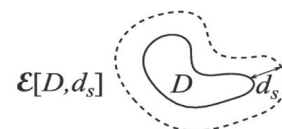
Assumption 2.2: a sphere could be written as the set  $e[s_i(t), R_r]$  with a given radius  $R_r$  covers mobile robot in the working space.

In industrial IoT environment each mobile robot's location should be uploaded to the central computer by the 3-D range image finder sensors detection. Therefore, the error correction for mobile robot's navigation is applied [17]. Moreover, for any mobile robots on each 3-D region such as  $N_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , should be involved to interference cancellation by radio wave filter. The robots' positions and radius  $R_r$  are used for recognizing the occupied positions belonging to any robots and the sensor node number  $i$ , then occupied positions depth measurements corresponding can be achieved by using a low-pass filter. The estimated region of  $N_i^t$  by using radio wave filter could be denoted as  $\hat{N}_i^t$ . There has an unoccupied area from image sensor detection  $A(t)$  can be calculated as follow (9):

$$A(t) = \bigcup_{i=1}^m \hat{N}_i^t \quad (9)$$

where  $m$  = the number of the sensor nodes.

Assumption 2.3: there is an arbitrary point  $p$  in the set  $A(t)$ , and the boundary of  $A(t)$  denoted as  $\partial A(t)$ . the minimum distance  $d(\partial A(t), p)$  with respect to time  $t$  is  $\leq v_r$ , where  $v_r$  is the speed of

Figure 7. The boundary of a closed set D and its safety range  $d_s$

robot movement, it is a constant speed and a safety range  $d_s > 0$  has defined in a constant. at any time  $t$ , the mobile robot should keep from the boundary  $\partial A(t)$ .

Assumption 2.4: The set  $R[A(t), d_s]$  is a connected set in any time  $t$ , at the same time, the robot's initial position  $s_0$  belongs to the set  $R[A(0), d_s]$  and is far away from the boundary of  $A(0)$ .

The mobile robot could travel in the dynamic and deformable environment in  $d_s$ -reduced region to avoid any other mobile robot to reach a target in a short trajectory. In this paper, the target belongs to the set  $R[A(t), d_s]$  and far away from the robot's initial position  $s_0(t)$ , at any time  $t$ .

### Characteristics of mobile robot navigation algorithm in industrial IoT

The performance characteristics of a mobile robot tracking depend on its basic relatively short instant safe path denoted by  $P^*$ , central computer computing power and navigation algorithm. The paths  $P^*$ , are described by their characteristic of successive and finite equally spaced points. it can be written as  $P^*(0), P^*(1), \dots, P^*(n)$ , where  $n$  = the length of this discrete path;  $P^*(0)$  = the current position  $s(t)$  of mobile robot.

The mobile robot in a future time  $t + k\delta$  for any random position  $k$  could be represented as  $P^*(k)$ ,  $\delta$  is an impact variable of time. A constant  $L$  equal to  $v_r\delta$  is the distance between any two successive points. The radius of the circumscribed circle of any three successive points should be  $\geq R_{\min}$ , and the initial torus  $Q$  should be consist by  $P^*(0)$ . In this chapter, there are two conditions of a mobile robot in industrial IoT environment be considered. In the first condition, the mobile robot is steady and only has one point  $P^*(n = 0)$  at its current position after it reaches a target. In the second condition, the mobile robot according to the optimal path  $P^*(n > 0)$  travelling to an arranged target. Let  $\delta$  be the sampling interval in the distance between any two successive points. the unoccupied area  $A(t)$  is calculated by the central computer to obtains real-time positions  $s_1(t), s_2(t), \dots$  according to the WSN to update the paths  $P^*(1), P^*(2), \dots$  for the mobile robot. Let  $T$  be a positive integer stand for time window and its properties of generated path  $P^*$  is from the robot's current position  $s(t)$  to the target  $T$ .  $P^*$  is guaranteed to be collision-free to the obstacles in time  $[t, t + T\delta]$ . The mobile robot finally can arrive to the target

successful without any collisions according to the update  $P^*$  at an impact variable of time. Here gives a definition and assumption in dynamic industrial IoT environment for potentially unsafe regions. The obsoletely safe region at time  $t + k\delta$ ,  $k \leq T$  could be written as (10)

$$\bar{A}(t, k) := R[A(t), k\delta v_{\max}] \quad (10)$$

among them,  $T$  is over time window,  $k$  is a constant  $k = 0, 1, 2, \dots$  and the extension as (11) from (10) is an instant safe path in the time window  $T$ :

$$\bar{A}(t, k) := R[A(t), T\delta v_{\max}], k > T \quad (11)$$

the mobile robot should be considered to avoid collision with other robot in industrial IoT environment. Moreover, a valid area  $\hat{A}(t, k)$  in any future time  $t + k\delta$  is defined in (12). The symbol  $\setminus$  denotes the set difference.

$$\hat{A}(t, k) := \bar{A}(t, k) \setminus \bigcup_{j \neq i} [p_j^*(k), R_r] \quad (12)$$

Thus, the (13) shows the mobile robot's path  $P^*$  in combine to the above formula.

$$p_j^*(k) = p_j^*(n) \quad (13)$$

The path  $P^*$  is called a target-reaching path if  $\|T - P^*(n)\| \leq L$ , for any  $t$  and  $k$ , the set  $R[\bar{A}(t, k), d_s]$  is a connected set and the destination point  $T$  belongs to the set  $R[\hat{A}(t, k), d_s]$ .

There are two different parts of the proposed navigation algorithm will be introduced in next coming chapters. The first part of the algorithm is rough path generation and the path planning following in the second part. A rough path  $P$  is generated by the probabilistic roadmap algorithm when the mobile robot needs to be navigated to the arranged destination in any time step. Then, the instant path  $P^*$  calculated by path planning algorithm is adjusted from rough path  $P$ . the mobile robot can avoid collision from any obstacles and other robot to arrived the destination successfully in the industrial IoT workspace environment according to above algorithm combine to the WSN in 5G communication.

### Impact of rough path generation parameters for a mobile robot with an arranged destination

The shortest rough path  $P$  during the area  $R[A(t), d_s + T\delta v_{\max}]$  is created by probabilistic roadmap method to provide the routing scheme for mobile robot with an arranged destination point  $T$  in in-

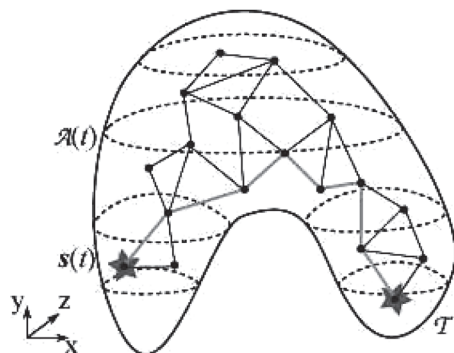


Figure 8. The mobile robot in probabilistic roadmap method to arrive destination point

dustrial IoT environment [18]. The rough path generation algorithm as in Fig 8.

Figure 8 (below) gives a definition and algorithm description.  $D$  is a closed point set, a line segment path between any two points is stand for a valid routing path, however the line segment between two points should not intersect with the boundary of  $D$ .

There has randomly distributed points from the set  $R[A(t), d_s + T\delta v_{\max}]$  represents the mobile robot's current position  $s(t)$  and destination points  $T$  for motion tracking in this dissertation. The shortest valid path from  $s(t)$  to  $T$  consisting of a few random points number can be calculated according to Dijkstra's algorithm which may represent, for example, computer routing protocol algorithm and wireless transmission path calculation. For a given source node  $s(t)$ , the Dijkstra algorithm finds the shortest path between that node and every other.

### The mobile robot path planning in industrial IoT environment

For simplicity in analyzing characteristics of mobile robot path planning algorithm, the instant safe path  $P^*$  are realized in the valid area  $R[\hat{A}(t, k), d_s]$  and are hence modelled using mathematic simulation. It helps in predicting behavior under various environmental conditions, and further in help analysis rough path characteristic curves.

The common approach is to utilize the Mathematical calculation, which is primarily based on vectors superposition of linear space. There is a model have been proposed for the simulation of a path planning algorithm various vectors intensities and calculation conditions.

The key factor that affects the results of the simulation and accuracy in representing the nonlinear characteristics of the mobile robot path plan-

ning is mathematic modeling [19]. There are different kinds of parametric models presented in various literatures in the past few decades, like wireless communication in internet of vehicle navigation model, automatic driving navigation model, automatically avoid obstacles and much more.

The most commonly used model is wireless communication navigation model, as they provide better relations with a practical internet data center keeping in mind the simplicity in implantation and the iteration speed in the extracting parameters gives minimum error with respect to characteristics of path planning or navigation analysis as per manufacturer's datasheet.

Before we elaborate on the discussion of the mathematical model for mobile robot path planning we will introduce the following acronyms that will assist in better understanding the following generated equations which are related to the further models. The different parameters are listed below in table 1 where a set of symbols are introduced with a brief explanation of each acronym.

Table 1. Parameters of the mobile robot path planning method

|       |                                                                                       |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $F_I$ | Equidistant sampling point separation distance                                        |
| $F_R$ | Minimum distance from current position to boundary point                              |
| $F_P$ | A vector pointing to destination, only related to one previous point                  |
| $F_C$ | A vector field, which guarantees that the path satisfies the non-integrity constraint |

There is a well-known and widely used models, the level of complexity, depending on the purpose it used for: The version of this model is presented in the following. The path points of the rough path  $P$  denoted as  $P_{(0)}, P_{(1)}, \dots, P_{(n)}$  and vector fields  $F_I, F_R, F_P, F_C$ , in  $R^3$  to help adjust the path points of  $P$ . The resultant in the rough path vector of these four fields at point  $P_K$  is shown in (14)

$$\vec{F}(P_K) = \vec{F}_I(P_K) + \vec{F}_R(P_K) + \vec{F}_P(P_K) + \vec{F}_C(P_K) \quad (14)$$

The  $F_I$  could guarantees the interval between any two successive points of  $P$  is approximately equal to the distance between destination  $T$  and finite spaced point  $L$ . For any  $k \neq 0$ , let  $\vec{l}_k$  be the vector from  $P_k$  to  $P_{k-1}$  as in Fig 9.  $\vec{F}_I(P_K)$  in mathematical expressions as (15)

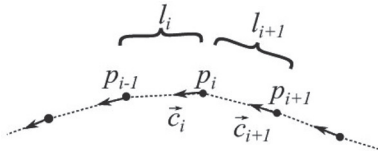


Figure 9. The vector from finite spaced point

$$\overrightarrow{F_I}(P_K) := \begin{cases} G_I (b(k)\overrightarrow{l_k} - b(k+1)\overrightarrow{l_{k+1}}) & \text{if } k \neq n \\ G_I (b(k)\overrightarrow{l_k}) & \text{if } k = n \end{cases} \quad (15)$$

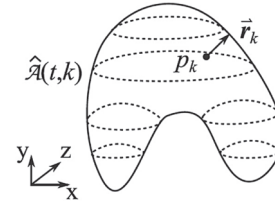
Where  $G$  is a tunable gain and  $b(k)$  is a fixed arithmetic expression in (16). This model without the consideration for the losses due to the module's internal series resistance, as well as contacts and interconnections between cells and modules in this dissertation. It has a relatively good approximation precision and it is perhaps the most suitable model for the Mobile robot navigation communication in industrial IoT environment, as it offers good compromise between approximation precision and simplicity [20].

$$b(k) := 1 - \frac{L}{\|\overrightarrow{l_k}\|} \quad (16)$$

Let  $\overrightarrow{\gamma_k}$  is the shortest vector from current point  $P_K$  to the boundary of valid area when the  $\hat{A}(t, k) \geq d_s$  in Fig 10. In this moment,  $\overrightarrow{F_R}(P_K)$  could be written as (17).

$$\overrightarrow{F_R}(P_K) := \begin{cases} G_R \left( 1 - \frac{d_s}{\|\overrightarrow{\gamma_k}\|} \right) \overrightarrow{\gamma_k} & \text{if } \|\overrightarrow{\gamma_k}\| \leq d_s \\ \vec{0} & \text{if } \|\overrightarrow{\gamma_k}\| > d_s \end{cases} \quad (17)$$

From the current point  $P_n$ , there has a unit vector pointing  $\vec{g}$  pointing to the destination points  $T$ , and let  $\overrightarrow{h_k}$  be the vector from the point  $P_n$  to the

Figure 10. Current point  $P_K$  to the boundary of valid area

closest point at the circle  $B$ . The  $\overrightarrow{F_P}$  and  $\overrightarrow{F_C}$  can be calculated as (18) and (19).

$$\overrightarrow{F_P}(P_n) := G_P \vec{g} \quad (18)$$

$$\overrightarrow{F_C}(P_K) := \begin{cases} G_c \left( 1 - \frac{R_{\min}}{\|\overrightarrow{h_k}\|} \right) \overrightarrow{h_k} & \text{if } \|\overrightarrow{h_k}\| \leq R_{\min} \\ \vec{0} & \text{if } \|\overrightarrow{h_k}\| > R_{\min} \end{cases} \quad (19)$$

There has a smallest error between  $P_K$  and equilibrium point when the appropriate attenuation be chosen such that each  $P_K$  can converge fast to the position where  $\|\vec{F}(P_K)\| < F_{th}$  in the proposed path planning algorithm. The instant safe path  $P^*$  in current time step could be achieved with the proposed algorithm.

## Conclusion

In this paper, we proposed a WSN based on 5G wireless advantage collision-free navigation method for mobile robot in the industrial IoT environment. A mobile robot cannot be equipped with heavy obstacle detection sensors. Therefore, to solve the navigation problem, a WSN consisting of 3-D range finder is involved to detect the static and dynamic obstacles in the workspace. With the navigation of the sensor network, only a path tracking controller is required for each mobile robot. The robot can be navigated directly in the industrial workspace without any specialization.

## REFERENCE

1. **Li, S.** Compressed sensing signal and data acquisition in wireless sensor networks and Internet of things. / S. Li, L. D. Xu, X. Wang, – IEEE Trans. Ind. Informat., – 2013. Vol. 9. No. 4, p. 2177–2186.
2. **Yan, H.** Superframe planning and access latency of slotted MAC for industrial WSN in IoT environment. / H. Yan, Y. Zhang, Z. Pang, L.D.Xu, – IEEE Trans. Ind. Informat., 2014. Vol. 10. No. 2, p. 1242–1251.
3. **Moranduzzo T.** Monitoring structural damages in big industrial plants with UAV images. / T. Moranduzzo and F. Melgani, in Proc. – 2014 IEEE Geosci. Remote Sens. Symp., – Quebec City, Canada, –2014, p. 4950–4953.
4. **Dong, M.** UAV-assisted data gathering in wireless sensor networks. / M. Dong, K. Ota, M. Lin, Z. Tang, S. Du, H. Zhu, J. Supercomput., – 2014. Vol. 70. No. 3, p. 1142–1155.
5. **Harik, E. H. C.** UAV-UGV cooperation for objects transportation in an industrial area. / E. H. C. Harik, F. Gu'erin, F. Guinand, J. F. Breth'e, and H. Pelvillain, Proc. – 2015 IEEE Int. Conf. Ind. Technol – Seville, Spain, – 2015, p. 547–552.
6. **Kreibich, O.** Quality-based multiple-sensor fusion in an industrial wireless sensor network for MCM, / O. Kreibich, J. Neuzil, and R. Smid – IEEE Trans. Ind. Electron., – 2014. Vol. 61, no. 9, p. 4903–4911.

7. **Iqbal, Z.** A cooperative wireless sensor network for indoor industrial monitoring. / Z. Iqbal, K. Kim, and H. N. Lee, IEEE Trans. Ind. Informat., – 2017. Vol. 13, no. 2, p. 482–491.
8. **Matveev, A. S.** A method of reactive 3D navigation for a tight surface scan by a nonholonomic mobile robot. / A. S. Matveev, K. S. Ovchinnikov, and A. V. Savkin, – Automatica, – 2017. Vol. 75, p. 119–126.
9. **Ping, P.** Flexible Multiple Access Control Algorithm in 5g Mobile Wireless System. / P. Ping, Y. N. Petrenko, Информатика Journal, – 2018. Vol. 15, No. 3 p. 93–101.
10. **Ping P.** The physical layer technologies in 5g mobile communication system. / P. Ping, Y. N. Petrenko, – International Conference on Physics, Computing and Mathematical Modeling (PCMM). – Shanghai, China, – 2018. p. 111–117.
11. **Ai, B.** Occupancy estimation for smart buildings by an auto-regressive hidden Markov model. / B. Ai, Z. Fan, and R. X. Gao, in Proc. – 2014 Amer. Control Conf., – Portland, OR, USA, – 2014, p. 2234–2239.
12. **Wang, C.** A strategy for safe 3D navigation of non-holonomic robots among moving obstacles. / C. Wang, A. V. Savkin, and M. Garratt, – Robotica, – 2018. Vol. 36, No. 2, p. 275–297.
13. **Hang, L.** Wireless Sensor Network Based Navigation of Micro Flying Robots in the Industrial Internet of Things. / L. Hang, and A. V. Savkin. – IEEE Transactions on industrial informatics, – 2018. Vol. 14. No. 8, p. 3524–3533.
14. **Olivka, P.** The design of 3D laser range finder for robot navigation and mapping in industrial environment with point clouds preprocessing. / P. Olivka, M. Mihola, P. Novák, T. Kot, and J. Babjak. – in Modelling and Simulation for Autonomous Systems. – Rome, Italy: Springer-Verlag, – 2016, p. 371–383.
15. **Aleny'a, G.** Using ToF and RGBD cameras for 3D robot perception and manipulation in human environments. / G. Aleny'a, S. Foix, and C. Torras. – Intell. Service Robot. – 2014, Vol. 7, No. 4, p. 211–220.
16. **Shih, C. Y.** COLA: Complexity-reduced trilateration approach for 3D localization in wireless sensor networks. / C. Y. Shih and P. J. – 4th Int. Conf. Sensor Technol. Appl. Mestre, Italy, – 2010, p. 24–32.
17. **Held, D.** Robust real-time tracking combining 3D shape, color, and motion. / D. Held, J. Levinson, S. Thrun, and S. Savarese. – Int. J. Robot. Res. – 2016. Vol. 35, No. 1–3, p. 30–49.
18. **Rosmann, C.** Integrated online trajectory planning and optimization in distinctive topologies. / C. Rosmann, F. Hoffmann, and T. Bertram. – Robot. Auton. Syst. – 2017. Vol. 88, p. 142–153.
19. **Indiveri, G.** A proof of concept for the guidance of 3D underactuated vehicles subject to constant unknown disturbances. / G. Indiveri, S. Cret'1, and A. A. Zizzari. – IFAC Proc. – 2012. Vol. 45, No. 27, p. 307–312.
20. **Wang, F.** An efficient UAV navigation solution for confined but partially known indoor environments. / F. Wang, K. Wang, S. Lai, S. K. Phang, B. M. Chen, and T. H. Lee. – in Proc. 11th IEEE Int. Conf. Control Autom. – Taichung, Taiwan. – 2014, p. 1351–1356.

Поступила  
22.11.2018

После доработки  
22.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

PEI PING, ПЕТРЕНКО Ю.Н.

## АЛГОРИТМ 3D НАВИГАЦИИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА В СРЕДЕ ПРОМЫШЛЕННОГО ИНТЕРНЕТА ВЕЩЕЙ НА ОСНОВЕ 5D МОБИЛЬНОЙ КОММУНИКАЦИИ

При значительном развитии полупроводниковой техники, создающей миниатюрные устройства с мощной способностью в обработке данных и обладающими сетевыми возможностями, в настоящее время Интернет вещей (Internet of Things) (IoT) стал одной из самых горячих тем в промышленности и в коммуникации. Идея IoT состоит в том, чтобы постоянно соединять физические объекты, такие как микроволновая печь, двери, отопительные приборы, освещение, холодильники и так далее-все, что среди нас. Техническое понятие IoT позволяет этим различным физическим объектам быть представленными информацией о себе за счет сигналов датчиков и хранить эту информацию на сервере. Промышленный Industrial IoT должен объединить различные технологии, чтобы улучшить коммуникации от машины к машине. У каждого из промышленных элементов IoT есть свои собственные коммуникационные требования, которые характеризуют надежность и качество обслуживания (QoS). Согласно развитию промышленной автоматизации, промышленный Интернет вещей IoT широко используется на “умных” предприятиях, чтобы собрать данные, обработать их и оптимально управлять производством. Один из самых важных компонентов IoT-беспроводная сеть датчиков, которую легко развернуть в уже имеющихся производственных условиях для решения большого количества задач, таких как контроль хода производственного процесса и контроль окружающей среды.

В статье сосредоточено внимание на 3D-навигации мобильного робота в 5G-коммуникации совместно с сетью датчиков для планирования пути робота. Мобильный робот может быстро перемещаться в трехмерной (3D) внутренней промышленной среде для решения многих задач, таких как мониторинг возможных поломок оборудования на предприятии [3], сбор данных и их передача по каналам беспроводной связи [4], решение транспортных задач [5].

**Ключевые слова:** Интернет вещей (IoT), беспроводная сеть датчиков, коммуникации, промышленная навигация.



**Pei Ping** was born in Xi'an, China. He received the bachelor's degree in information technology engineering from Rovaniemi University of Applied Sciences, Finland, in 2013. The M.Sc. degree in system analysis and data processing from Belarusian National Technical University 2017. he is currently working toward the Ph.D. Degree at the department of information systems and technologies in Belarusian National Technical University (BNTU), Minsk, Belarus, His interest includes Flexible control of automatic traffic machine collision avoidance based on wireless mobile communication system, multiplexing algorithm in mobile wireless communication system. He also is a professional network engineer from HUAWEI company.



**Yury N. Petrenko**, IEEE Life member. He has been teaching Automatic Control of Electric Drives, Numerical Control Systems and Programmable Logic Controllers. He is an author, Editor and Co-Author of 7 books, recommended by Ministry of Education for University and College -level engineering education and 2 Monographs (in coop). His main research interests in recent years include data signal processing, new control techniques applied to power electronics and electric drives, control and automation of the photovoltaic power station, predictive control systems synthesis and analysis.

**УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕХНИЧЕСКИМИ  
ОБЪЕКТАМИ**

**MANAGEMENT OF  
TECHNICAL OBJECTS**

UDK 623.7

N. N. AREFYEV

## FILTER KALMAN FOR SOLVING THE PROBLEM OF COORDINATES UAV

*Belarusian National Technical University*

*Unmanned aerial vehicles (UAVs) are increasingly used in military and scientific research. Some miniaturized UAVs rely entirely on the global positioning system (GPS) for navigation. GPS is vulnerable to accidental or deliberate interference that can cause it to fail. It is not unusual, even in a benign environment, for a GPS outage to occur for periods of seconds to minutes. For UAVs relying solely on GPS for navigation such an event can be catastrophic. This article proposes an extended Kalman filter approach to estimate the location of a UAV when its GPS connection is lost, using inter-UAV distance measurements. Increasing the accuracy of coordinate's determination is one of the most crucial tasks of the modern UAV navigation. This task can be solved by using different variants of integration of navigation systems. One of the modern variants of integration is the combination of GPS/GLONASS-navigation with the extended Kalman filter, which estimates the accuracy recursively with the help of incomplete and noisy measurements. Currently different variations of extended Kalman filter exist and are under development, which include various number of variable states [1]. This article will show the utilization efficiency of extended Kalman filter in modern developments.*

**Keywords:** Kalman filter, GPS, coordinates UAV, mathematical modeling, aerial vehicle, visual odometry, projective geometry, control, navigation, integration.

### Theory analysis

The integration of observation channels in control systems of objects subjected to perturbations and measurement errors of the motion is based on the observations control theory started in the early 1960s. The first works on this topic were based on the simple Kalman filter property, namely: the possibility of determining the root-mean-square estimation error in advance, without observations, by solving the Riccati equation for the error covariance matrix [2]. The development of this methodology allowed solving problems with a combination of discrete and continuous observations for stochastic systems of discrete-continuous type. At the same time, methods were developed for solving problems with constraints imposed on the composition of observations, temporal and energy constraints both on separate channels and on aggregate. For a wide class of problems with convex structure, necessary and sufficient conditions for optimality were obtained, both in the form of dynamic programming equations and the generalized maximum principle, which opens the possibility of a numerical solution. The tasks of integrating surveillance and control systems for UAVs open a new wide field of application of the observation control

methods, especially when performing autonomous flight tasks. One of the most important problems is the detection of the erroneous operation of individual observation subsystems, in which the solution of navigational tasks should be redistributed or transferred to backup subsystems or other systems operating on other physical principles [3].

A typical example: navigation through satellite channels such as global positioning system (GPS), which is quite reliable in simple flight conditions, but in a complex terrain (mountains, gorges), it is necessary to use methods to determine your position with the help of other systems based, for example, on landmarks observed either with optoelectronic cameras, or radar.

Here the serious problem of converting the signals of these systems into data suitable for navigation arises. The human-operator copes with this task on the basis of training. That is the serious problem in computer vision area and it is one of the mainstream in the UAV autonomous flight. Meanwhile, the prospects for creating artificial intelligence systems of this level for UAV applications are still far from reality.

At the same time, the implementation of simple flight tasks, such as either access to the aerial

survey area or tracking the reference trajectory the organization of data transfer in conditions of limited time and energy storage and even landing, are quite accessible for performing UAVs in the autonomous mode with reliable navigation aids.

Unmanned aerial, land-based and underwater-based vehicles that perform the autonomous missions use, as a rule, an on-board navigation system supplemented by sensors of various physical nature. At the same time, unlike remote control systems in which these sensors present information in the form as operator-friendly as possible, the measurement results should be converted into the input signals of the control system, which requires other approaches. This is especially evident in the example of an optical or optoelectronic surveillance system, whose purpose in remote control mode is to provide the operator with the best possible image of the surrounding terrain. At the same time, in an autonomous flight, the observing system should be able to search for the characteristic objects in the observed landscape and give the control system their coordinates and estimate the distances between them. Of course, the issue of providing an excellent image and determining the metric properties of the observed images are connected, and in no case cancel one another. However, what a human operator does automatically basing on a sufficiently high-quality image of the terrain, the readings of other sensors and undoubtedly on previous experience, the control system algorithm must do by using data from video and other systems, with the same accuracy as the human operator [5].

### Mathematical Model Construction

In the given example we will talk about the UAV horizontal motion, in other words, we will look through the problem of 2d localization [2]. In our case, this is justified by the facts that for many situations that are practically encountered, the UAV can remain at about the same height. This supposition is widely used to simplify the modeling of aircraft dynamics [2]. Dynamic UAV model is given by the following system of equations:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \cos \eta(t), \\ \dot{y}(t) &= v(t) \sin \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) &= \varepsilon_{\omega}(t), \\ \dot{v}(t) &= \varepsilon_v(t),\end{aligned}\quad (1)$$

where  $\{x(t), y(t)\}$  are the UAV coordinates in horizontal plane as the function of time,  $\eta(t)$  is the UAV direction,  $\omega(t)$  is the UAV angular velocity, and  $v(t)$  is the UAV actual velocity,  $\varepsilon_{\omega}(\cdot)$  and  $\varepsilon_v(\cdot)$  functions are constant.

They are mutually independent with the certain covariances  $E[\varepsilon_{\omega}(t) \varepsilon_{\omega}(S)]$  and  $E[\varepsilon_v(t) \varepsilon_v(S)]$  equal to  $Q_{\omega} \delta(t-s)$  and  $Q_v \delta(t-s)$  respectively and are used for modeling of the UAV acceleration caused by the wind, pilots' maneuvers, etc.  $Q_u$  and  $Q_v$  values are the derivatives of the UAV maximum angular velocity and measured values of the UAV linear velocity variation  $\delta$  is the Kronecker sign.

The given system of equations is approximate because of nonlinearity of the model and the noise. The simplest way of approximation here is the approximation by Euler method. The discrete model of the dynamic UAV motion system is shown below.

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + v_k \Delta t_k \cos \eta_k, \\ y_{k+1} &= y_k + v_k \Delta t_k \sin \eta_k, \\ \eta_{k+1} &= \eta_k + \omega_k \Delta t_k, \\ \omega_{k+1} &= \omega_k + \varepsilon_{w,k}, \\ v_{k+1} &= v_k + \varepsilon_{v,k},\end{aligned}\quad (2)$$

where  $\theta_k = [x_k, y_k, \eta_k, \omega_k, v_k]$  is the discrete state vector of the Kalman filter, which allows one to approximate the value of the continuous state vector.  $\Delta t_k$  is the time interval between  $k$  and  $k+1$  measurements.  $\{\varepsilon_{w,k}\}$  and  $\{\varepsilon_{v,k}\}$  is the sequences of values of white Gaussian noise with zero mean value.

The covariance matrix for the first sequence is as follows [11]:

$$E\{\varepsilon_{w,k} \varepsilon_{w,j}\} = Q_{\omega} \Delta t_k \delta_{kj}$$

Analogically, for the second sequence is

$$E\{\varepsilon_{v,k} \varepsilon_{v,j}\} = Q_v \Delta t_k \delta_{kj}$$

Performing the corresponding substitutions in the system equations (2), we obtain:

$$\begin{aligned}\omega_{k+1} &= \omega_k + \gamma_{w,k} \sqrt{\Delta t_k}, \\ v_{k+1} &= v_k + \gamma_{v,k} \sqrt{\Delta t_k}.\end{aligned}\quad (3)$$

The  $\{\gamma_{w,k}\}$  and  $\{\gamma_{v,k}\}$  sequences are mutually independent. They are also the sequences of values of white Gaussian noise with zero mean value and the  $Q_{\omega}$  and  $Q_v$  covariance matrixes respectively. The advantage of this configuration

is that is shows the discrete noise changing in the interval between each measurement. As a re-

sult, we have the following discrete dynamic model [8]:

$$\theta_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t_k \cos \eta_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t_k \sin \eta_k \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{f[\theta_k]} \theta_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{\Delta t_k} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta t_k} \end{pmatrix}}_{U_k} \begin{pmatrix} \gamma_{w,k} \\ \gamma_{v,k} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

The equation for  $d_k$  is as follows:

$$d_k = \frac{\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}}{h|\theta_k|} + \varepsilon_{d,k}, \quad (5)$$

where  $x$  and  $y$  are the UAV coordinates at the  $k$ -time and  $\varepsilon_{d,k}$  is the Gaussian sequence of random parameters with zero mean value which is used to specify the error.

The given sequence is supposed to be independent from  $\{\varepsilon_{\omega, k}\}$  and  $\{\varepsilon_{v, k}\}$ .

The equations (3) and (4) serve as a basis for assessing the location of the UAV, where the coordinates are obtained with the help of the Extended Kalman filter. Simulating the failure of navigation systems regarding this type of filter shows its significant effectiveness [9].

To be clearer we will give a simple example. Let an UAV fly at uniformly accelerated speed, with some constant  $a$ -acceleration.

$$x_{t+1} = x_t + atdt + \delta_t, \quad (6)$$

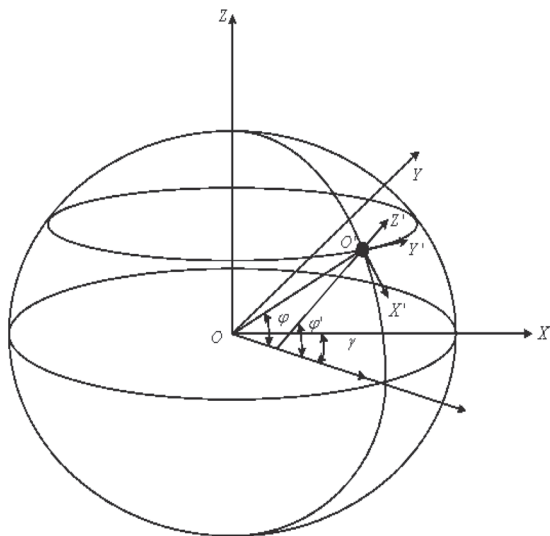


Figure 1. Coordinate transformation. XYZ is the geocentric coordinate system and X'Y'Z' is the local coordinate system

where  $x$  is the UAV coordinate at the  $t$  – time and  $\delta$  is a random value.

During the flight, the following GPS data were collected: time, geocentric latitude, geocentric longitude, altitude time of arrival, pulse width, signal frequency and amplitude. The longitude, latitude and height (LLH) coordinates recorded by the UAV are not well suited for navigation and tracking problems because linear motion becomes non-linear in these coordinates. In comparison, a local coordinate system whose  $X$  and  $Y$  axes are in the local horizon and  $Z$  axis points to the local Zenith is much better suited and is the industry standard. Therefore, the geocentric latitude and longitude location information is first converted into a local coordinate system, which is shown in Figure 1.  $X'Y'Z'$  is the local coordinate system. The origin of the local coordinate system is randomly chosen to be the starting location of UAV. In the figure,  $\varphi$  and  $\gamma$  are the geocentric latitude and longitude respectively.  $\varphi$  is the geodetic latitude [12]. Refer to [13] for a detailed description on how to convert the LLH coordinates into local coordinates.

Let us suppose that we have a GPS-sensor, which receives the data about the UAV location. Let us perform the result of the modeling of this process through MATLAB.

### Simulation

At the present time, the UAV are not equipped to determine inter-UAV distances; hence, as indicated in the introduction, loss of a GPS connection is likely currently to be fatal. For this reason, the real world data we use is entirely data obtained when UAV do actually have a GPS connection. From this data, we are able to simulate loss of a GPS connection and acquisition of inter-UAV distance measurements in the following way. A cer-

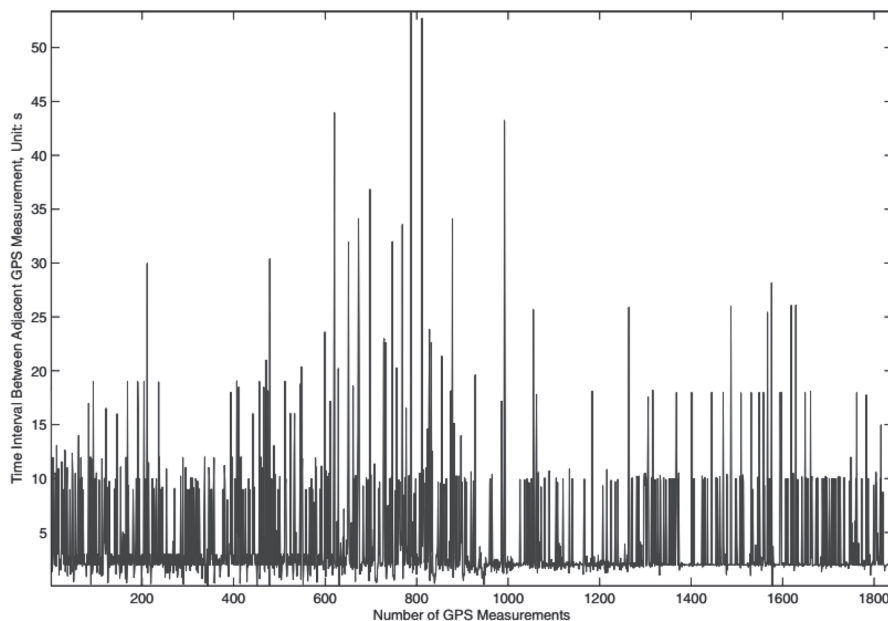


Figure 2. Time interval between adjacent GPS measurements for UAV

Table 1. Steps of the simulations

| Simulation | $E(\hat{x} - x)$ | $\sigma(\hat{x} - x)$ | $E(\hat{y} - y)$ | $\sigma(\hat{y} - y)$ | $E(\hat{d})$ | $\sigma(\hat{d})$ |
|------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|--------------|-------------------|
| 1          | 10.5836          | 46.3087               | -10.9167         | 38.1720               | 38.8275      | 48.2183           |
| 2          | 8.7661           | 45.6333               | -11.7453         | 37.2149               | 37.2011      | 47.9382           |
| 3          | 10.9220          | 47.6161               | -11.8613         | 38.5942               | 39.2297      | 49.7761           |
| 4          | 10.1834          | 62.1998               | -12.3481         | 40.1211               | 39.0115      | 64.9048           |
| 5          | 8.7462           | 50.1151               | -12.1389         | 39.2946               | 39.4348      | 52.1936           |
| 6          | 9.2793           | 45.4631               | -10.8837         | 37.9597               | 38.9082      | 46.8867           |
| 7          | 9.8450           | 55.4412               | -12.0954         | 39.5770               | 40.1785      | 57.1734           |
| 8          | 7.2842           | 46.6786               | -12.2274         | 36.2379               | 38.4231      | 47.0972           |
| 9          | 9.2419           | 45.9712               | -12.3221         | 37.8227               | 39.2994      | 47.2921           |
| 10         | 8.6380           | 52.5742               | -12.3697         | 39.9224               | 40.1153      | 54.5532           |
| Average    | 9.3490           | 49.8001               | -11.8909         | 38.4917               | 39.0629      | 51.6034           |

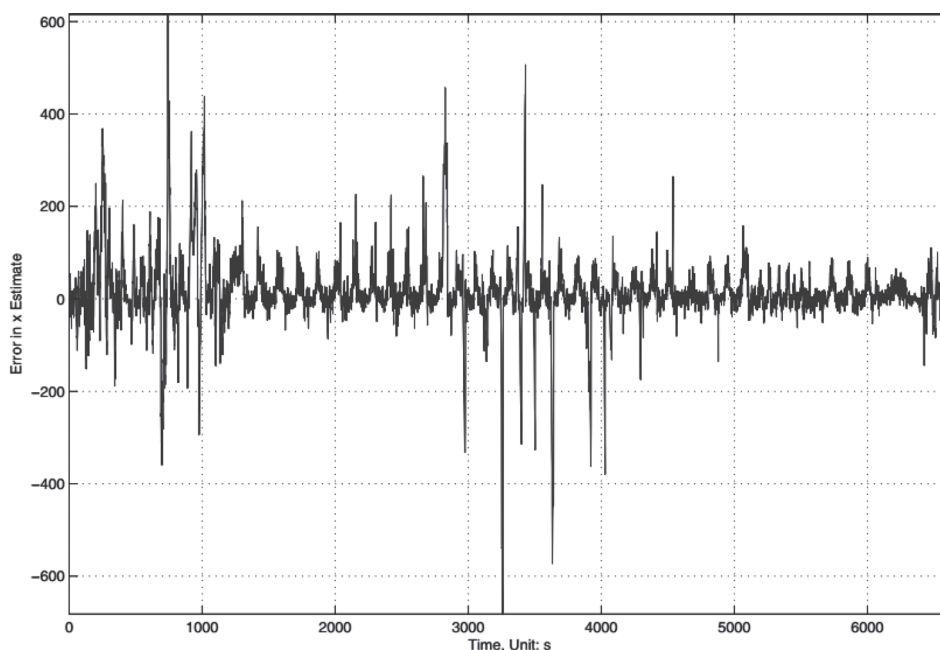
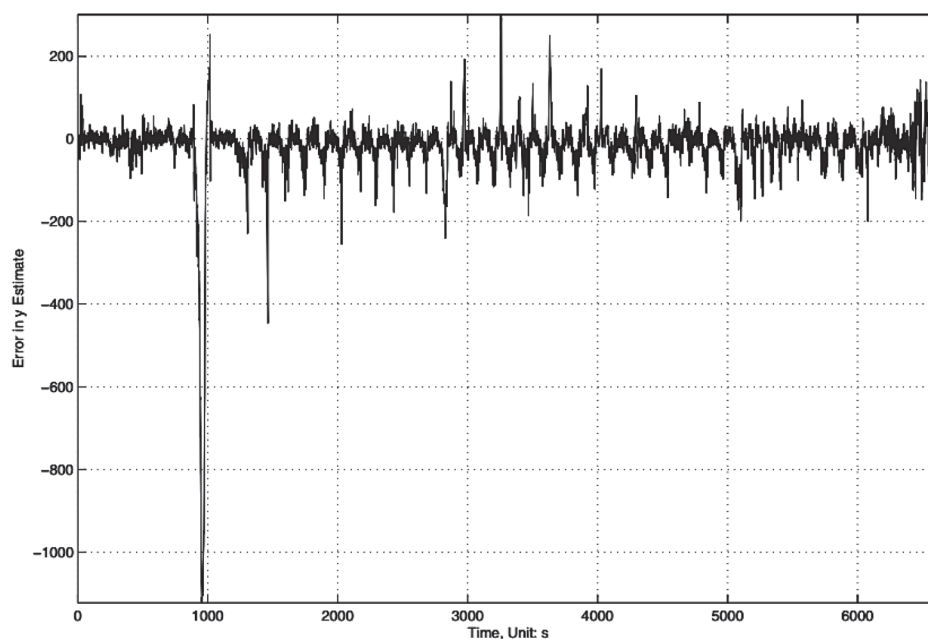
tain time series of intervals of synthetic GPS outage is postulated. During these intervals, inter-UAV distances are synthesized at discrete instants of time. This is done by taking the actual GPS measurements, determining the corresponding inter-UAV distance, and then adding on to the resulting value a Gaussian random variable with zero mean and standard deviation of 10m. This is delivered to the algorithm as a (synthesized) inter-UAV distance, and the Kalman filter is run with this data. Validation occurs by comparing the estimated UAV tracks delivered by the Kalman filter with those in the original real-world data, where GPS measurements are actually available, so that actual UAV tracks are known [14].

In the simulations, we assume that UAV has a GPS connection most of the time but it may temporarily lose the GPS connection for up to 54s (see Figure 2).

In the simulation, the first two state variables of the initial state vector are chosen to be the ini-

tial GPS location of UAV and other state variables are chosen randomly. The initial value of  $P$  is chosen based on an empirical estimate as  $P = \text{diag}\{1000 \ 1000 \ 0.3 \ 0.01 \ 1\}$ . It is found that generally the choice of  $P$  has little impact on the filter performance; however a very large deviation of  $P$  from its true value does cause the divergence of the filter. The value of  $Q$  is chosen based on an empirical estimate as  $Q = \text{diag}\{0.0003 \ 10\}$ . The choice of  $Q$  is critical for the filter performance and  $Q$  should be chosen carefully based on an in-depth understanding of the UAV dynamics. The value of  $R$  is chosen to be 100. In real applications, the value of  $R$  can be obtained via a priori calibration of the distance measurement equipment. The distance measurement can be obtained by a simple round trip timing mechanism [10].

The UAV location obtained from GPS is used as the «true location» of the UAV. The path of UAV starts from the rectangular on the right side of the figure. Apparently, the estimated location

Figure 3. Variation of error in  $x$  with TimeFigure 4. Variation of error in  $y$  with Time

has larger error on this part of the figure. As time evolves, the estimated location gradually converges to the true location, which is evidenced by much less deviation from the true location on the left side of the figure. Figure 3 and 4 shows the variation of error. As shown in the Table, both the estimate of  $x$  and the estimate of  $y$  have a bias. As a reference, the value of  $x$  varies within the range of  $[-5000, 1000]$  and the value of  $y$  varies within the range of  $[-6000, 3000]$ . Therefore, the value of the bias is comparatively small. However, both

biases have a fairly consistent trend in all ten simulations [13].

Figure 5 shows the effectiveness of filtering by Kalman algorithm. However, in a real situation, signals often have non-linear dynamics and abnormal noise. In such cases, the extended Kalman filter is used. In case, if the noise variances are not too large (i.e. the linear approximation is adequate) the application of the extended Kalman filter yields the solution of the problem with high accuracy. But in case if the noise is not Gaussian

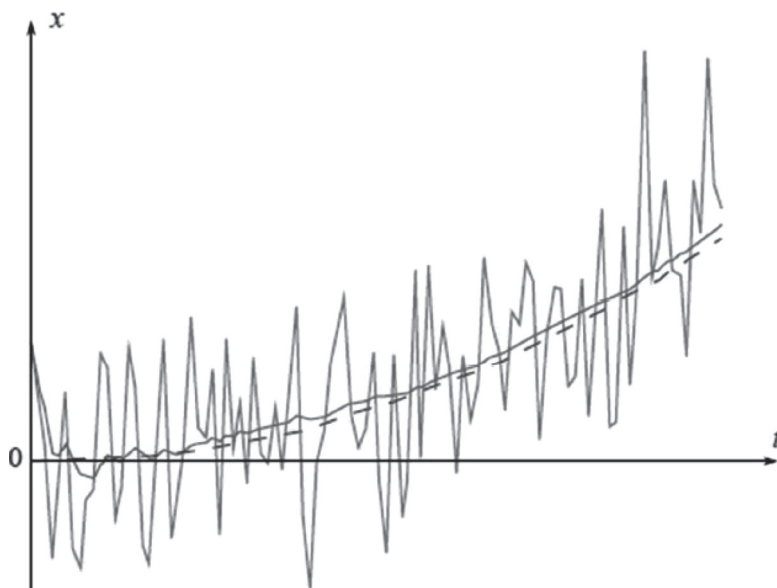


Figure 5. Filtering the sensor reading with the help of Kalman filter

the extended Kalman filter mustn't be applied. In this case, a partial filter is usually used, which uses numerical methods for taking integrals based on Monte Carlo methods with Markov chains.

### Partial Filter

Let us perform one of the algorithms, which develop the ideas of the extended Kalman filter – a partial filter. Partial filtering is a non-optimal filtering method that works when performing a Monte Carlo join on a set of particles that represent the probability distribution of the process. Here a particle is an element taken from the a priori distribution of the estimated parameter. The main idea of the partial filter is that the large amount of particles can be used to represent the distribution estimate. The larger the number of particles is used, the more precise the set of particles will represent the a priori distribution. The particle filter is initialized by placing  $N$  of particles in it from the a priori distribution of the parameters that we want to estimate. The filtering algorithm involves running these particles through a special system, and then weighing it using information obtained from measuring these particles. The resulting particles and associated masses represent the posterior distribution of the evaluation process. The cycle is repeated for each new measurement and the weights of the particles are updated to represent the subsequent distribution. One of the main problems of the traditional method of particle filtering is that as a result such an

approach usually has several particles with a huge weight unlike most others with a very light weight. It leads to the filtering instability [6]. This problem can be solved by introducing a sampling frequency, where  $N$  of new particles are taken from a distribution composed of old particles. The result of the evaluation is obtained by getting a sample of the mean value of the particle set. If we have several independent samples, the mean sample will be an accurate estimate of the mean value that determines the final variance.

Even if the particle filter is not optimal, then as the number of particles tends to infinity, the efficiency of the algorithm approaches the Bayesian estimation rule. That is why it is recommended to have the possible number of particles to get the best result. Unfortunately, this leads to a strong increase in the computational complexity and therefore forces us to seek a compromise between accuracy and calculation speed. So the number of particles should be chosen based on the requirements for the accuracy estimation problem. Another important factor for the operation of the particle filter is the restriction on the sampling frequency. As mentioned earlier, the sampling frequency is an important parameter of the particle filtering and without it, the algorithm eventually becomes degenerate. The idea is that if the weights are distributed too unevenly and the sampling threshold is soon reached, then the low-weight particles are discarded, and the remaining set forms a new probabilistic density for which

new samples can be taken. Choosing a sampling frequency threshold is a rather difficult task, because too high frequency causes excessive filter sensitivity to noise, and too low one gives a large error. Another important factor is the probability density [11].

In general, the particle filter algorithm shows a good productivity of location calculation for stationary targets and in the case of relatively slow moving targets with unknown acceleration dynamics. Generally, the particle-filtering algorithm is more stable than the extended Kalman filter, and is less prone to the degeneration and serious failures. In cases of nonlinear, non-Gaussian distribution, this filtering algorithm shows a very good accuracy in determining the target location while the extended Kalman filtering algorithm cannot be used under such conditions. One of the disadvantages of this approach is its higher complexity compared with the extended Kalman filter, as well as the fact that it is not always obvious how to select the parameters for this algorithm correctly [12].

#### **Optimal estimation of a random process**

In contrast to common approaches based on consideration as a criterion for optimizing the minimum of the mean square error of estimation, in this case the maximum of a posteriori probability density of the evaluated process is considered as an optimization criterion. The a priori probability density of the evaluated process is initially considered to be a Gaussian differentiable function, which allows it to be expanded in a Taylor series without using in the intermediate transformations the characteristic functions and decomposition into harmonics. For small time intervals, the probability density of the measurement error vector is defined by definition also Gaussian with zero mathematical expectation. This makes it possible to obtain a mathematical expression for the discrepancy function characterizing the deviation of the values of the real measurement of the process from its mathematical model. To determine the optimal a posteriori estimate of the state vector, it is assumed that this estimate corresponds to its mathematical expectation, the maximum of the posterior probability density. This makes it possible to derive the Stratonovich-Kushner equation on the basis of the Bayesian formula for the a priori and a posteriori probability density. The use of

the Stratonovich-Kushner equation for various types and values of the drift vector and the diffusion matrix of the Markov stochastic process makes it possible to solve various problems of filtering, identification, smoothing, and forecasting the state of the system for both continuous and discrete systems. The discrete realization of the developed continuous algorithms for a posteriori estimation allows obtaining specific discrete algorithms for the implementation in the on-board computer of a mobile robotic system [7].

#### **Prospective researches in this field**

The use of the Kalman filter model, similar to what we have shown, can be seen in [3], where it is used to improve the characteristics of the complex system (GPS + computer vision model for comparison with the geographic base), and the satellite navigation equipment failure situation is simulated. With the help of the Kalman filter the results of the system operation in case of failure were significantly improved (for example, the error in determining the altitude was reduced by about half, and the errors in determining the coordinates along different axes were reduced by almost 9 times). The analogical use of the Kalman filter is also shown in [4].

The problem, which is interesting from the point of view of the method set, is solved in [1]. There is also used a Kalman filter with 5 states, with some differences in the construction of the model. The result obtained exceeds the result of the given model given [5] due to the use of additional means of integration, (photo and thermal images are used). The application of the Kalman filter in this case makes it possible to reduce the error in determining the spatial coordinates of a given point to a value of 5.5 m.

#### **Conclusion**

As a conclusion, we can note that the use of the Kalman filter in the UAV location systems is practiced in many modern developments. There is a huge number of variances and aspects of such use up to simultaneous application of several similar filters with different factors of states. One of the most promising trends in Kalman filter development is working on creating a modified filter, where the errors of will be represented by color noise, which will make it even more valuable for solving real problems. The great interest in this

area is a partial filter by means of which it is possible to filter non-Gaussian noise. The given variety and the tangible results in increasing accuracy, especially in case of the failure of standard satel-

lite navigation systems, are the main factors of the impact of this technology on various scientific fields related to the development of accurate and fault-tolerant navigation systems for various aircrafts.

## REFERENCES

1. **Makarenko G. K., Aleshechkin A. M.** Investigation of the filtering algorithm in determining the coordinates of an object by the signals of satellite radio navigation systems // *Doklady TUSURa* [Reports of TUSUR]. – 2012. – No. 2 (26). – pp. 15–18 (in Russian).
2. **Miller, B. M.** Optimal control of observations in the filtering of diffusion processes // *I, II. Autom. Remote Control* 1985, p. 46, p. 207–214, p. 745–754
3. **Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T.** Estimation with Applications to Tracking and Navigation // *Theory Algorithms and Software*. – 2001. – Vol. 3. – pp. 10–20.
4. **Miller, B. M.; Runggaldier, W. J.** Optimization of observations: A stochastic control approach. *SIAM J. Control Optim.* 1997, p. 35, p. 1030–1052.
5. **Andreev, K. A.; Rubinovich, E. P.** UAV Guidance When Tracking a Ground Moving Target with Bearing-Only Measurements and Digital Elevation Map Support // *Southern Federal University, Engineering Sciences: Rostov Oblast, Russia*, 2015; pp. 185–195. (In Russian).
6. **Bassem I. S.** Vision based Navigation (VBN) of Unmanned Aerial Vehicles (UAV) // *UNIVERSITY OF CALGARY*. – 2012. – Vol. 1. – pp. 100–127.
7. **Lobaty A. A., Yacina Y. F., Arefyeu N. N.** Optimal estimation of random processes on the criterion of maximum a posteriori probability // *Belarussian National Technical University*. – 2016.
8. **Conte G., Doherty P.** An Integrated UAV Navigation System Based on Aerial Image Matching // *Aerospace Conference*. – 2008. – Vol. 1. – pp. 3142–3151.
9. **Guoqiang M., Drake S., Anderson B.** Design of an extended kalman filter for uav localization // *In Information, Decision and Control*. – 2007. – Vol. 7. – pp. 224–229.
10. **Ponda S. S.** Trajectory Optimization for Target Localization Using Small Unmanned Aerial Vehicles // *Massachusetts institute of technology*. – 2008. – Vol. 1. – pp. 64–70.
11. **Wang J., Garrat M., Lambert A.** Integration of gps/ins/vision sensors to navigate unmanned aerial vehicles // *IAPRS&SIS*. – 2008. – Vol. 37. – pp. 963–969.
12. **Tsukanov A. V.** Development of a software package for constructing the optimal trajectory of UAV motion. – 40 p.
13. **Chepurny I. V.** Dynamics of the flight of aircraft: training. allowance / I. V. Chepurny – Komsomolsk-on-Amur: FGBOU VPO «KnAGTU», 2014. – 112 p.
14. **Nathan A.** WPF 4. Detailed guidance. – Trans. from English. – SPB.: Symbol-Plus, 2011. – 880 p.: Ill.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Макаренко Г. К., Алешечкин А. М.** Исследование алгоритма фильтрации при определении координат объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем // *Доклады ТУСУРа* [Доклады из ТУСУР]. – 2012. – No. 2 (26). – 15–18 с.
2. **Miller, B. M.** Optimal control of observations in the filtering of diffusion processes // *I, II. Autom. Remote Control* 1985, p. 46, p. 207–214, p. 745–754
3. **Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T.** Estimation with Applications to Tracking and Navigation // *Theory Algorithms and Software*. – 2001. – Vol. 3. – pp. 10–20.
4. **Miller, B. M.; Runggaldier, W. J.** Optimization of observations: A stochastic control approach. *SIAM J. Control Optim.* 1997, p. 35, p. 1030–1052.
5. **Andreev, K. A.; Rubinovich, E. P.** UAV Guidance When Tracking a Ground Moving Target with Bearing-Only Measurements and Digital Elevation Map Support // *Southern Federal University, Engineering Sciences: Rostov Oblast, Russia*, 2015; pp. 185–195. (In Russian).
6. **Bassem I. S.** Vision based Navigation (VBN) of Unmanned Aerial Vehicles (UAV) // *UNIVERSITY OF CALGARY*. – 2012. – Vol. 1. – pp. 100–127.
7. **Lobaty A. A., Yacina Y. F., Arefyeu N. N.** Optimal estimation of random processes on the criterion of maximum a posteriori probability // *Belarussian National Technical University*. – 2016.
8. **Conte G., Doherty P.** An Integrated UAV Navigation System Based on Aerial Image Matching // *Aerospace Conference*. – 2008. – Vol. 1. – pp. 3142–3151.
9. **Guoqiang M., Drake S., Anderson B.** Design of an extended kalman filter for uav localization // *In Information, Decision and Control*. – 2007. – Vol. 7. – pp. 224–229.
10. **Ponda S. S.** Trajectory Optimization for Target Localization Using Small Unmanned Aerial Vehicles // *Massachusetts institute of technology*. – 2008. – Vol. 1. – pp. 64–70.
11. **Wang J., Garrat M., Lambert A.** Integration of gps/ins/vision sensors to navigate unmanned aerial vehicles // *IAPRS&SIS*. – 2008. – Vol. 37. – pp. 963–969.
12. **Цуканов А. В.** Разработка программного комплекса построения оптимальной траектории движения БПЛА. – 40 с.

13. Чепурных И. В. Динамика полёта самолётов: учеб. пособие / И. В. Чепурных. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КНАГТУ», 2014. – 112 с.
14. Натан А. WPF 4. Подробное руководство. – Пер. с англ. – СПб.: Символ-Плюс, 2011. – 880 с., ил.

Поступила  
25.09.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

АРЕФЬЕВ Н. Н.

## ФИЛЬТР КАЛМАНА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛУЧЕНИЯ КООРДИНАТ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Белорусский национальный технический университет

*В статье даётся классификация основных компонентов систем беспилотного летательного аппарата (БЛА), даётся обоснование фильтру Калмана и необходимость использования его для точного получения координат беспилотных летательных аппаратов. Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) все чаще используются в военных и научных исследованиях. Некоторые миниатюрные БПЛА полагаются полностью на глобальной системе позиционирования (GPS). GPS уязвим для случайного или преднамеренного вмешательства что может привести к его сбою. Для БПЛА, полагающихся исключительно на GPS для навигации такое событие может быть катастрофическим. В настоящем документе предлагается расширенный подход фильтра Калмана для оценки местоположения БПЛА, когда его GPS-соединение потеряно. Приводится альтернативное использование частичного фильтра. В конце делается вывод о необходимых направлениях дальнейших научных исследований.*

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, математическое моделирование, фильтр Калмана, GPS, контроль, навигация, интеграция, геометрия движения.



**Арефьев Н. Н.** Аспирант кафедры «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета. Получил высшее образование и окончил магистратуру по направлению «Информационные системы и технологии» в 2014 и 2015 годах соответственно. На данный момент аспирант ведёт исследования в направлениях цифровой обработки сигналов и систем управлений, включая параметрическую оптимизацию систем и программирование. Интересы в целом касаются ИТ, программирования и робастного управления.

E-mail: mikalai.arefyev@mail.ru

**Arefyev N. N.** Received the graduate degree in software engineering from the Belarusian National Technical University in 2014 and the Master's degree in system analysis and control of information processing in 2015. He is currently working on PhD degree program. His current research interests include control of unmanned aerial objects.

УДК 629.7+531.383

А. А. ЛОБАТЫЙ, А. С. РАДКЕВИЧ

## ПОШАГОВАЯ НЕЧЕТКАЯ КОРРЕКЦИЯ АЛГОРИТМА ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

*Белорусский национальный технический университет*

*Рассматривается задача оценивания информации, содержащейся в случайных сигналах, поступающих от различных источников – измерителей. При этом предполагается, что измерители являются дискретными и описываются, как и исходный оцениваемый процесс, дискретной математической моделью в виде разностных уравнений. В качестве алгоритма оценивания рассматривается дискретный фильтр Калмана, который в общем случае при неадекватности математических моделей реальным процессам может давать искаженную информацию. Для повышения точности оценивания предлагается применять комплексирование всех возможных измерителей с введением дополнительной априорной информации с помощью системы нечеткой логики. При этом переход от полученных расчетным путем вероятностных характеристик оцениваемого процесса к функциям принадлежности нечеткой логики предлагается производить на основе выходных параметров фильтра Калмана с помощью нормировки апостериорной плотности вероятности. Данный подход позволяет повысить точность оценивания, так как учитывает дополнительную информацию и комплексную её обработку.*

**Ключевые слова:** дискретный процесс, оценивание, плотность вероятности, функция принадлежности, нечеткая логика.

### Введение

Развитие систем автоматического управления в настоящее время характеризуется разработкой методов и алгоритмов, учитывающих различного вида неопределенности в получении и обработке информации об управляющих сигналах. Так как синтез сложных систем управления производится на основе их математических моделей, то эти неопределенности в стохастических системах формализуются в виде случайных воздействий на входы и параметры системы [1, 2].

В настоящее время всё большее распространение получил подход, основанный на представлении неопределенностей, присутствующих в математических моделях, на основе теории нечеткой математики (нечетких множеств, нечеткой логики) [3]. Данный подход имеет свои достоинства, связанные с упрощением способа формализации поставленной задачи исследования объекта. Представление объекта исследования с помощью стохастических уравнений дает возможность исследовать динамические свойства объекта. В то же время системы нечеткой логики позволяют при ре-

шении не формализуемой задачи использовать в том числе и априорный опыт эксперта. Оба подхода основаны на использовании современных информационных технологий и дополняют друг друга, так как каждый из них используется в зависимости от конкретной постановки задачи.

Одной из основных задач синтеза систем управления является задача оптимального оценивания (фильтрации) управляющего сигнала. Широкое распространение при решении данной задачи получила так называемая теория калмановской фильтрации [4, 5], в основе которой лежит предположение о том, что известна математическая модель оцениваемого процесса и известна математическая модель измерителя этого процесса. В общем случае при наличии математической модели исследуемого объекта (системы) в виде векторно-матричных стохастических дифференциальных уравнений для процесса и его измерителя при заданном критерии качества оценивания в виде минимума среднего квадрата ошибки оценивания, путем математических преобразований можно получить векторно-матричное уравне-

ние для оптимальной оценки процесса (фильтр Калмана). В некоторых случаях в качестве критерия оптимальности рассматривается максимум апостериорной вероятности оцениваемого процесса. Как показано в [6], при использовании гауссовой аппроксимации апостериорной плотности вероятности задача оптимальной фильтрации при линейной постановке также сводится к классическому фильтру Калмана.

### Решение задачи оценивания

В ряде практических задач синтеза технических систем рассматриваются случайные процессы, измеряемые и оцениваемые в дискретные моменты времени. Это имеет место в том случае, когда используемые измеритель и вычислители являются дискретными, то есть информация в них квантована. Так как квантованием по уровню как правило пренебрегают в силу сложности его учета и отсутствием необходимости, то математическая модель системы рассматривается как дискретная импульсная, описываемая векторно-матричными рекуррентными (разностными) выражениями вида [4, 5]:

$$Y(k+1) = A(k)Y(k) + N(k)U(k) + F(k)\xi(k), \quad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; Y(0) = Y_0;$$

где  $Y(k)$  –  $n$ -мерный вектор;  $\alpha(k)$  – дискретный гауссов центрированный белый шум с матрицей дисперсий  $G(k)$ ;  $U(k)$  – детерминированная последовательность (управляющее воздействие);  $A(k)$ ,  $N(k)$ ,  $F(k)$  – заданные (известные) матрицы коэффициентов.

В дискретные моменты времени  $t_k$  наблюдается (безынерционно измеряется) вектор  $Z(k)$ , который в общем случае  $m$ -мерный, где  $m \leq n$ .

$$Z(k+1) = C(k+1)Y(k+1) + \zeta(k+1), \quad (2)$$

где  $\zeta(k)$  – вектор дискретного белого шума с дисперсионной матрицей

$$M[\zeta(h)\zeta^T(k)] = Q(k)\delta_{hk}, \quad (3)$$

где  $\delta_{hk}$  – символ Кронекера.

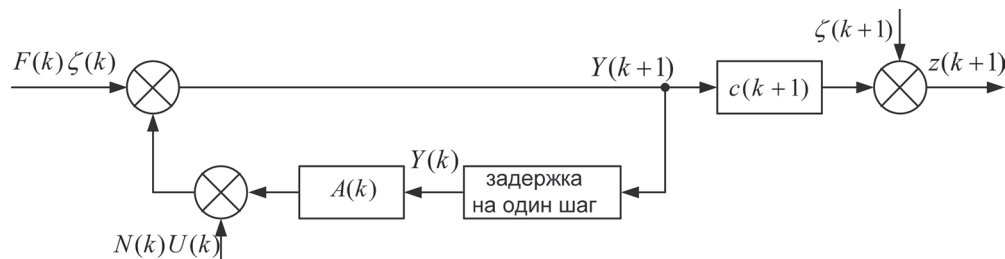


Рис. 1. Структурная схема объекта управления и измерителя

Случайные последовательности  $\xi(k)$  и  $\zeta(k+1)$  для упрощения задачи в классической постановке принимаются между собой не коррелированными. Начальные условия процесса  $Y(k)$  считаются гауссовыми.

Структурная схема дискретного объекта управления (входного сигнала) и измерителя изображена на рис. 1.

Задача состоит в определении наилучшей оптимальной апостериорной оценки  $\hat{Y}(k)$  в смысле минимума среднеквадратичной ошибки, которая имеет вид

$$M\left[\left(\hat{Y}(k) - Y(k)\right)^T \left(\hat{Y}(k) - Y(k)\right)\right] \rightarrow \min. \quad (4)$$

Имеет место известная задача фильтрации (оценивания). В то же время с другой стороны эта задача может формулироваться как определение оптимальной структуры системы, обеспечивающей минимум ошибки выходного сигнала.

Для модели случайного процесса (1) и измерителя (2) аналитически получен алгоритм линейного фильтра, состоящей из рекуррентных уравнений [4, 5] (фильтр Калмана приведён без вывода):

$$\hat{Y}(k+1) = \hat{Y}'(k+1) + B(k+1)\left[Z(k+1) - C(k+1)\hat{Y}'(k+1)\right], \quad (5)$$

где

$$\hat{Y}'(k+1) = A(k)\hat{Y}(k) + N(k)U(k). \quad (6)$$

$\hat{Y}'(k+1) = \hat{Y}(k+1|k)$  – одношаговое предсказание  $\hat{Y}(k)$ .

Формулы для матрицы  $B(k+1)$  и рекуррентных уравнений корреляционной матрицы ошибки при этом имеют вид

$$B(k+1) = R(k+1)C(k+1)Q^{-1}(k+1); \quad (7)$$

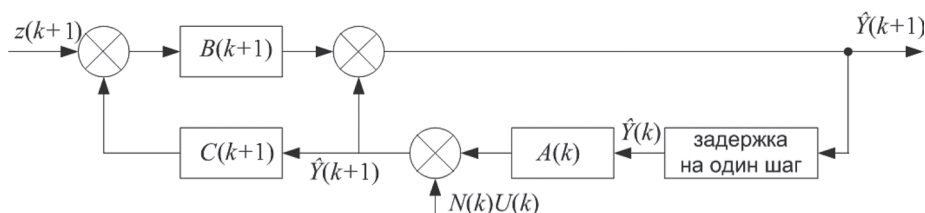


Рис. 2. Структурная схема оптимальной системы

$$R(k+1) = R'(k+1) - R'(k+1)C^T(k+1) \times \\ \times \{C(k+1)R'(k+1)C^T(k+1) + Q(k+1)\}^{-1} \times \\ \times C(k+1)R'(k+1); \quad (8)$$

$$R'(k+1) = A(k)R(k)A^T(k) + F(k)G(k)F^T(k). \quad (9)$$

где  $R'(k+1) = R(k+1|k)$  – одношаговое предсказание матрицы ошибки, которая имеет вид:

$$R(k) = M[e(k)e^T(k)], \quad (10)$$

где  $e(k) = \hat{Y}(k) - Y(k)$  – ошибка оценки.

Рекуррентному алгоритму (6) – (10) соответствует структурная схема оптимальной системы (рис. 2).

Таким образом, приведённые уравнения описывают алгоритм оптимального оценивания, а также оптимальную структурную схему системы оценивания.

Заметим, что алгоритм реализации фильтра Калмана в виде выражений (6)–(9) представляет собой уравнения (рекуррентные выражения) для апостериорных вероятностных моментов дискретного случайного процесса  $Y(k)$  с учетом измерений  $Z(k)$  и являются двухмо-

ментной аппроксимацией апостериорной плотности вероятности  $f(Y, k) = f(Y|Z, k)$ .

При естественном допущении о том, что плотность вероятности распределения дискретного процесса (случайной последовательности)  $Y(k)$  гауссова, то этого вполне достаточно для определения  $n$ -мерной плотности вероятности  $f(Y, k)$ , которая имеет вид [1]

$$f(Y, k) = f(y_1, y_2, \dots, y_n, k) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2^n \pi^n \Delta(k)}} \exp \left[ -\frac{\Delta^*(k)}{2\Delta(k)} \right], \quad (11)$$

где  $\Delta(k)$  – определитель матрицы  $R_y(k)$ .

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) & \dots & R_{1n}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) & \dots & R_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}(k) & R_{n2}(k) & \dots & R_{nn}(k) \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$\Delta^*(k)$  – окаймленный определитель, получаемый из  $\Delta(k)$  путем приписывания одного  $(n+1)$  столбца и  $(n+1)$  строки, состоящих из членов  $y_1 - m_{y1}, y_2 - m_{y2}, \dots, y_n - m_{yn}, 0$ .

$$\Delta^*(k) = \begin{vmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) & \dots & R_{1n}(k) & y_1(k) - m_{y1}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k) & \dots & R_{2n}(k) & y_2(k) - m_{y2}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}(k) & R_{n2}(k) & \dots & R_{nn}(k) & y_n(k) - m_{yn}(k) \\ y_1(k) - m_{y1}(k) & y_2(k) - m_{y2}(k) & \dots & y_n(k) - m_{yn}(k) & 0 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

В данном случае вектор апостериорных математических ожиданий дискретной случайной последовательности  $Y(k)$  имеет вид

$$m_y(k) = [m_{y1}(k), m_{y2}(k), \dots, m_{yn}(k)]^T = \\ = \hat{Y}(k) = [\hat{y}_1(k), \hat{y}_2(k), \dots, \hat{y}_n(k)]^T.$$

С учетом того, что мы имеем апостериорные вероятностные моменты вектора  $Y(k)$ , переход от плотности вероятности  $f(Y, k) = f(Y|Z, k) = f(\hat{Y}, k)$  к функции принадлежно-

сти  $\mu(Y|Z, k) = \mu(\hat{Y}, k)$  предлагается производить путем нормирования  $f(\hat{Y}, k)$ , как это предлагается в работе [7]. При этом предполагается, что

$$\mu(\hat{Y}, k) = \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_n, k)}{f(y_1 = m_{y1}, y_2 = m_{y2}, \dots, y_n = m_{yn}, k)} = \\ = f(\hat{Y}, k) \cdot \sqrt{2^n \pi^n \Delta(k)}. \quad (14)$$

Так как для практического применения в системах нечеткой логики используются, как

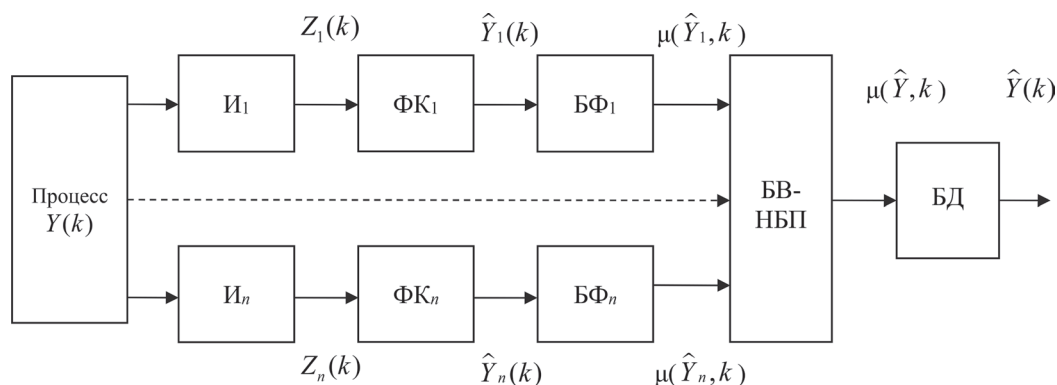


Рис. 3. Структурная схема пошаговой нечеткой коррекции

правило, одномерные функции  $\mu(\hat{y}, k)$ , то получение их из многомерной плотности вероятности не составляет труда, учитывая, что распределение компонент  $y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$  вектора  $Y(k)$  также гауссово. Для  $i$ -й компоненты вектора  $Y(k)$  формула вычисления  $\mu(y_i | z_i, k) = \mu(\hat{y}_i, k)$  описывается выражением

$$\mu(\hat{y}_i, k) = \exp \left( -\frac{(y_i(k) - \hat{y}_i(k))^2}{2R_{ii}(k)} \right). \quad (15)$$

В работе [8] исследуется возможность структурно-параметрической нечеткой коррекции алгоритма калмановской фильтрации случайного непрерывного сигнала с помощью системы нечеткой логики при наличии двух измерителей. В общем случае при наличии  $n$  измерителей дискретного вектора  $Y(k)$  структурная схема алгоритма оптимальной фильтрации процесса  $Y(k)$  имеет вид, представленный на рис. 3.

На рис. 3 обозначено:  $И_n$  –  $И_n$  – измерители процесса  $Y(k)$ ;  $ФК_1$  –  $ФК_n$  – фильтры Калмана;  $БФ_1$  –  $БФ_n$  – блоки фаззификации; БВ-НБП – блок вывода с нечеткой базой правил; БД – блок дефаззификации [8]. В БВ-НБП на основе сформулированных правил (базы правил) типа ЕСЛИ-ТО осуществляется формирование логического решения – получение нечеткого

множества в форме результирующей функции принадлежности. Определение для этой функции принадлежности путем дефаззификации количественного значения выходной лингвистической переменной будет являться искомым значением выходного сигнала  $\hat{Y}(k)$ .

### Заключение

Предложенный метод коррекции алгоритмов оптимального оценивания управляющих сигналов с помощью систем нечеткой логики целесообразно применять для решения задач фильтрации навигационной информации беспилотных летательных аппаратов [9, 10], получаемой от различных измерителей, в качестве которых выступают бесплатформенные инерциальные навигационные системы, спутниковые навигационные системы, радиотехнические, геомагнитные или другие измерители пространственного положения самодвижущегося объекта. Данный метод позволяет в условиях рассмотрения сложных трудноформализуемых процессов учесть дополнительные знания, накопленные квалифицированными специалистами при решении прикладных задач и таким образом повысить точность оценивания входной информации, используемой для формирования управляющих сигналов в рассматриваемой системе.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев, В. С. Теория стохастических систем / В. С. Пугачев, И. Н. Сеницын. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 5 т.
3. Ярушкина, Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем / Н. Г. Ярушкина. – М.: Экономика и финансы, 2004. – 320 с.
4. Балакришнан, А. В. Теория фильтрации Калмана: Пер. с англ. / А. В. Балакришнан. – М.: Мир, 1988. – 168 с.
5. Сеницын, И. Н. Фильтры Калмана и Пугачёва / И. Н. Сеницын. – М.: Университетская книга, 2006. – 640 с.
6. Лобатый, А. А. Оптимальное оценивание случайного процесса по критерию максимума апостериорной вероятности / А. А. Лобатый, Ю. Ф. Яцына, Н. Н. Арёфьев // Системный анализ и прикладная информатика. – 2016. – № 1. – С. 35–41.

7. Лобатый, А. А. Фаззификация сигналов нелинейной стохастической системы / А. А. Лобатый, М. А. Аль-Машхадани // Вестник БНТУ. – 2013. – № 2. – С. 28–32.
8. Лобатый, А. А. Структурно-параметрическая нечеткая коррекция алгоритма фильтрации / А. А. Лобатый, А. С. Абуфанас, А. С. Бенкафо // Системный анализ и прикладная информатика. – 2014. – № 4. – С. 4–8.
9. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / под ред. Б. С. Алёшина, К. К. Веремеенко, А. И. Черноморского. – М.: Физматлит, 2006. – 424 с.
10. Лобатый, А. А. Особенности применения фильтров Калмана-Бьюси в комплексах ориентации и навигации / А. А. Лобатый, А. С. Бенкафо // Доклады БГУИР, 2013 № 5(75), С. 67–71.

## REFERENCES

1. Pugachev, V. S. Theory of stochastic systems / V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn. – Moscow: Logos, 2004. – 1000 p.
2. Methods of classical and modern theory of automatic control: 5 t. / Ed. K. A. Pupkova and N. D. Egupova. – M.: Publishing House MSTU. N. E. Bauman, 2004. – 5 tons.
3. Yarushkina, N. G. Fundamentals of the theory of fuzzy and hybrid systems / N. G. Yarushkina. – M: Economy and Finance, 2004. – 320 p.
4. Balakrishnan, A. V. Kalman filtering theory: Per. from English. / A. V. Balakrishnan. – Moscow: Mir, 1988. – 168 p.
5. Sinitsyn, I. N. Kalman filters and Pugachev / I. N. Sinitsyn. – M: University Book, 2006. – 640 p.
6. Lobaty, A. A. Optimal Estimation of random processes on the criterion of maximum a posteriori probability / A. A. Lobaty, Y. F. Yatsyna, N. N. Arefiev // Systems Analysis and Applied Informatics. – 2016. – № 1. – pp 35–41.
7. Lobaty, A. A. Fuzzification signals nonlinear stochastic system / A. A. Lobaty, M. A. Al-Mashhadani // Bulletin of National Technical University. – 2013. – № 2. – S. 28–32.
8. Lobaty, A. A. Structural-parametric correction fuzzy filtering algorithm / A. A. Lobaty, A. S. Abufanas, A. S. Benkafo // Systems Analysis and Applied Informatics. – 2014. – № 4. – pp 4–8.
9. Orientation and navigation of mobile objects: modern information soc / ed. BS Aleshin, KK Veremeyenko, AI Black Sea. – M: FIZMATLIT, 2006. – 424 p.
10. Lobaty, A. A. Features The use of filters in the Kalman-Bucy complexes orientation and navigation / A. A. Lobaty, A. S. Benkafo // report BSUIR 2013 № 5 (75), pp 67–71.

Поступила  
23.02.2019

После доработки  
01.03.2019

Принята к печати  
25.03.2019

LOBATY A. A., RADKEVICH A. S.

## STEPWISE FUZZY CORRECTION OF THE ALGORITHM FILTERS OF RANDOM SIGNALS

*Belarusian National Technical University*

*The task of estimating the information contained in random signals from various sources – meters. It is assumed that the gauges are discrete and are described, like the original process assessed, by a discrete mathematical model in the form of difference equations. As an estimation algorithm, we consider a discrete Kalman filter; which, in the general case, when mathematical models are inadequate to real processes, can give distorted information. To improve the accuracy of estimation, it is proposed to apply the integration of all possible meters with the introduction of additional a priori information using a fuzzy logic system. At the same time, it is proposed to make a transition from the obtained probability characteristics of the estimated process to the membership functions of fuzzy logic based on the output filter parameters using the normalization of the posterior probability density. This approach allows to increase the accuracy of estimation, as it takes into account additional information and its complex processing.*

**Keywords:** discrete process, estimation, probability density, membership function, fuzzy logic.



**Lobaty A. A.** Doctor of Science, Professor. In 2000 he founded the department «Information Systems and Technologies» at the Belarusian National Technical University. His research interests include algorithms, concepts and methods of optimal control systems. Has extensive experience in the management of unmanned aerial vehicles. He is the author and co-author of many articles in scientific journals, conferences and books. E-mail: lobaty@tut.by



**Radkevich A. S.** Post-graduate student of the Belarusian National Technical University. He is engaged in scientific research in the field of development and optimization of control systems for unmanned aerial vehicles

E-mail: [radkevichu@gmail.com](mailto:radkevichu@gmail.com)

УДК 621.396

В. Э. МАРКЕВИЧ, В. В. ЛЕГКОСТУП

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВА УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТОЙ ДЛЯ ПЕРЕХВАТА АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЦЕЛИ

ОАО «АЛЕВКУРП»

*Рассматривается аналитический метод синтеза устройств совместного оптимального оценивания параметров и управления состоянием нелинейных динамических стохастических объектов. Выполнен краткий обзор существующих методов наведения ракет, а также сравнительная характеристика их достоинств и недостатков. Проанализированы пути повышения точности и помехоустойчивости методов наведения, одним из которых является подход, основанный на совместном оценивании и управлении состоянием нелинейного объекта со случайным задающими и мешающими воздействиями на входе.*

*Определены основные направления исследований по данной тематике, включающие статистический синтез оптимальной системы управления, оценку потенциальных характеристик спроектированной системы, анализ структуры оптимальной системы и оценка возможностей ее упрощения, формирование квазиоптимальных структур системы управления, оценка критичности (чувствительности) характеристик системы к изменению априорной информации.*

*Обоснован выбор метода инвариантного погружения для аналитического проектирования структуры оптимального устройства оценивания-управления. Приведены аналитические выражения, описывающие алгоритм функционирования устройства совместного оценивания-управления состоянием многомерного нелинейного многосвязного объекта.*

**Ключевые слова:** метод пропорциональной навигации, управляемая ракета, синтез устройства оптимального оценивания-управления, метод инвариантного погружения.

### Введение

Основным средством уничтожения авиации противоборствующих сторон (средств доставки и средств поражения), наряду с пилотируемыми и беспилотными авиационными комплексами управления вооружением, являются зенитные ракетные комплексы (ЗРК) малой, средней и большой дальности. Одним из перспективных направлений с точки зрения ресурсного обеспечения исследований (объем, продолжительность и стоимость опытно-конструкторских работ) является модернизация наземного сегмента существующих ЗРК (без изменения бортового оборудования ракет или с его небольшими доработками).

Потенциал модернизации данных систем предопределяется тем, что при их разработке и испытаниях в 1960–1980 гг. реализуемая на практике эффективность боевого применения оценивалась, как правило, для наиболее сложных тактических ситуаций: отсутствие эффек-

тивных средств подавления активных шумовых помех (АШП), ручная перестройка несущих частот, сложности технической реализации оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов первичной и вторичной обработки сигналов в условиях радиоэлектронного противодействия и т. д. Исходя из этого определялись характеристики точности наведения зенитных управляемых ракет (ЗУР), конкретные технические параметры системы наведения, допустимая степень упрощения устройств обработки координатной информации и, как следствие, реальные возможности системы по перехвату воздушной цели.

Существующие в настоящее время возможности по аппаратной и программной реализации алгоритмов управления ракетами позволяют отказаться от превалявавшего до недавнего времени подхода, основанного на предельном (максимально возможном) упрощении алгоритмов обработки, обеспечивающих допустимое

(минимально необходимое) качество функционирования при сохранении устойчивости в большинстве ситуаций. Нынешний уровень и ближайшие перспективы развития аппаратно-программных средств позволяет реализовывать не только квазиоптимальные (с неполным учетом априорной информации), но и оптимальные алгоритмы обработки сигнальной и траекторной информации, позволяющие существенно повысить боевую эффективность бортовых и наземных систем управления ракетным вооружением, в частности, наземных станций наведения ракет в составе ЗРК средней дальности.

Современные тенденции развития средств наблюдения и обработки радиолокационной, радионавигационной и радиосвязной информации характеризуются максимальным использованием пространственного разнесения первичных радиотехнических и навигационных устройств (многопозиционных радиотехнических систем МП РТС), комплексирования автономных (беспилотных) систем наземного, морского, воздушного и космического базирования, многократного дублирования (в основном, благодаря умеренной стоимости) для обеспечения требуемой точности и надежности, а также неуклонном снижении роли оператора в процессе работы.

Излагаемый ниже материал посвящен вопросам разработки алгоритмов совместного оценивания параметров и управления динамикой полета автономного объекта (зенитной ракеты, реактивного снаряда залпового огня, управляемого артиллерийского снаряда, беспилотного летательного аппарата) в пространственно-распределенной информационной-управляющей вычислительной подсистеме смешанного (воздушного и наземного) базирования с учетом пространственных кинематических связей каналов управления, характеристик помеховых воздействий, а также технических ограничений и функционально необходимых нелинейностей объекта.

### Краткий обзор методов наведения ракет

Существует сравнительно немного методов наведения ракет, которые условно можно разделить на три группы:

– двухточечные МН, которые характерны, в основном, для самонаводящихся управляе-

мых ракет (пропорциональная навигация, параллельное сближение);

– трехточечные МН, которые характерны для телеуправляемых ракет с радиокомандным или оптическим командным наведением (полное или частичное спрямление траектории);

– комбинированные МН, для которых характерно использование самонаведения с инерциальным управлением, радиокомандные инерциальные методы, а также телеуправление второго рода (телеуправление через ракету).

Анализ принципов построения существующих и вновь разработанных систем управления ракетным оружием показывает устойчивую тенденцию к преимущественному использованию метода пропорциональной навигации [1, 2].

Большинство современных алгоритмов управления ракетами – зенитными, авиационными, противоракетными, противоспутниковыми, противокорабельными и др.), предназначенных для поражения различного класса целей, базируются на различных вариантах метода пропорциональной навигации (МПН), или метода параллельного сближения, как частном случае метода наведения в фактическую (мгновенную) точку встречи с целью.

Согласно данному методу, кинематические нормальные ускорения ракеты должны быть пропорциональны угловой скорости вращения (УСВ) линии визирования (ЛВ) ракета-цель (РЦ). В векторной форме выражение записывается следующим образом [1, 2]:

$$\mathbf{W}_y = \mathbf{N}_0(t) \mathbf{M}(\Theta_2)(\omega_0 \Delta \mathbf{v}) + \Delta \mathbf{W}_0, \quad \omega_0 = \frac{[\Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{r}]}{\Delta \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{r}}, \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{W}_0 = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{W}}_0, \hat{\mathbf{W}}_1, \mathbf{g}_0, \Theta_0, \Theta_1, \Theta_2),$$

где  $\mathbf{W}_y = (W_{px} \ W_{py} \ W_{pz})^T$  – вектор управляющих ускорений ракеты в проекциях на оси системы координат (СК), связанной с ЛВ РЦ (СК ЛВ), причем, компонента продольного ускорения  $W_{px}$  в формировании сигналов не используется;  $\dot{\mathbf{u}}_0 = (\omega_{0x} \ \omega_{0y} \ \omega_{0z})^T$  – вектор УСВ ЛВ РЦ в проекциях на оси СК ЛВ;  $\Delta \mathbf{v} = \Delta \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  – вектор разности скоростей сближения ракеты  $\mathbf{v}_1$  и цели  $\mathbf{v}_2$ ;  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  – вектор разности декартовых координат ракеты  $\mathbf{r}_1$  и цели  $\mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{N}_0(t)$  – диагональная матрица навигационных коэффициентов размерностью  $3 \times 3$ , зависящая от па-

раметров движения цели и ракеты с диагональными элементами  $N_j \in [2; 10]$ ;  $\Delta \mathbf{W}_0$  – вектор компенсирующих ускорений, зависящий от ускорений ракеты  $\mathbf{W}_0$ , цели  $\mathbf{W}_1$ , ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}_0$ , а также скоростных углов ракеты  $\Theta_0$ , цели  $\Theta_1$  и углов наклона ЛВ РЦ  $\Theta_2$ .

Основными достоинствами разновидности МПН, используемого в ЗУР, являются:

- возможность реализации обстрела с произвольного ракурса, как в переднюю, так и заднюю полусферу атаки;
- формирование траектории наведения, обеспечивающей наведение на прямолинейно летящую цель с минимальными перегрузками;
- слабая чувствительность метода к величине флуктуационной ошибки измерения угловых координат цели (в отличие от трехточечных методов телеуправления).

Вместе с тем, существует ряд особенностей данного метода, снижающие в некоторых тактических ситуациях его эффективность:

- высокая чувствительность МПН к неконтролируемым случайным внешним возмущениям по нормальным ускорениям;
- увеличение кривизны траектории при отсутствии сигналов компенсации систематических возмущающих воздействий;
- значительные углы упреждения ракеты относительно ЛВ цели, движущейся с большими угловыми скоростями относительно станции наведения ракет (СНР).

Таким образом, одной из основных задач, стоящих перед исследователями и разработчиками, является поиск решений, позволяющих в значительной степени снизить влияние указанных факторов на характеристики точности, устойчивости и чувствительности системы наведения ракет в условиях активного радиоэлектронного противодействия при сохранении приемлемой для практической реализации технической сложности проектируемого устройства.

В работах [1, 2] для случая плоского перехвата цели в линейном приближении получены типовые законы оптимального управления при различных формах квадратичного функционала качества, в том числе – с учетом стохастического характера ускорения маневрирующей цели. При этом алгоритм расчета управ-

ляющих ускорений, в зависимости от используемого критерия оптимальности, может принимать следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_y &= \mathbf{M}(\Theta_2) N_0(t) ((\omega_0 \Delta \mathbf{v}) + 0,5(3 - \alpha_1 \tau) \hat{\mathbf{W}}_1), \\ \mathbf{W}_y &= \mathbf{M}(\Theta_2) (N_0(t) \Delta \mathbf{v} + 0,2 k_\gamma \tau \Delta \mathbf{r}) \omega_0, \\ \tau &= -\frac{\Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{v}_0}{\Delta \mathbf{v}}, \quad \Delta \mathbf{v}_0 = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\|\Delta \mathbf{v}\|}, \quad N_0(t) \in [2 \dots 10], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $N_0(t)$  – скалярный навигационный коэффициент, одинаковый для двух каналов управления;  $\alpha_1 = \Delta f_1$  – ширина спектра флуктуаций нормальных ускорений цели;  $\mathbf{W}_1$  – вектор ускорений цели;  $k_\gamma$  – коэффициент штрафа на величину промаха в точке встречи, имеющий размерность  $\text{с}^{-2}$ ;  $\tau$  – время, оставшееся до момента встречи ракеты с целью.

В работе [3] излагается новаторская методология синтеза, основанная на синергетической теории оптимального управления, получившей название аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). На основе данного подхода в работе [4] получены в замкнутой форме аналитические выражения, реализующие оптимальный закон перехвата цели на основе многомерной нелинейной и многосвязной модели кинематики относительного перемещения ОУ и цели, учитывающий ускорения маневра. В работе предполагается, что оценки фазовых координат стохастического динамического объекта получены тем или иным способом, т. е. задача оптимального оценивания координат и формирование закона управления состоянием решаются независимо. Отсутствие учета априорных статистических характеристик наблюдаемых процессов неизбежно приводит к ухудшению реализуемых на практике показателей эффективности проектируемого устройства по сравнению с потенциально достижимыми.

Более того, оптимальное раздельное решение задачи оценивания и управления стохастическими объектами возможно лишь для линейных квадратичных систем с гауссовскими шумами наблюдения (на основе принципа статистической эквивалентности) [1, 2, 5–7]. Для нелинейных стохастических систем в лучшем случае возможно квазиоптимальное решение при большом отношении сигнал/помеха (ОСП), достигающем 20 дБ.

При малых отношениях сигнал-помеха в нелинейных системах оценивания-управления снижение качества происходит значительно быстрее, чем в линейных (при одинаковых исходных данных на входе). В значительной степени данная особенность функционирования свойственна МП РТС, работающих в различных тактических ситуациях в широком диапазоне интенсивностей активных шумовых помех на входе, для которых связь между наблюдаемыми и оцениваемыми координатами в общем случае нелинейная.

При наведении объекта в условиях активного радиоэлектронного противодействия величина ОСП может значительно снижаться, вплоть до пороговых значений на входе устройства захвата сигналов либо схемы сопровождения по угловым координатам и дальности-скорости. В таких ситуациях раздельное оценивание фазовых координат и управление состоянием объекта может привести к снижению эффективности функционирования и срыву процесса наведения (неприемлемому уменьшению вероятности поражения цели).

Исходя из вышеизложенного, рассмотрим возможность совместного оптимального оценивания-управления состоянием стохастического нелинейного объекта в условиях низких ОСП на входе дискриминаторов сигнала ошибки, близкого к пороговым значениям, при котором величина разовой ошибки измерения соизмерима с шириной апертуры дискриминационной характеристики по выбранной координате.

#### **Методика статистического синтеза устройства оптимального оценивания-управления**

Практика решения задач аналитического проектирования (синтеза) стохастических систем обработки радиолокационной информации в интересах управления состоянием динамических объектов позволяет сформулировать следующую целесообразную последовательность действий инженера-разработчика в указанном направлении [1–4]:

- формулировка задачи и определение типа проектируемой системы обработки радиолокационной информации;
- разработка математической модели реального объекта управления;

- разработка математической модели канала наблюдения;

- формулировка критерия качества (оптимальности) функционирования проектируемой системы обработки и управления;

- аналитический синтез оптимальной системы управления;

- оценка потенциальных характеристик (математическое моделирование и статистический анализ) синтезированной оптимальной системы;

- анализ структуры оптимальной системы и оценка возможностей ее упрощения, формирование квазиоптимальных структур системы управления;

- оценка критичности (чувствительности) характеристик оптимальной (квазиоптимальной) системы к изменению априорной информации (условий функционирования или статистических характеристик входных данных);

- разработка путей уменьшения чувствительности проектируемой системы к изменению условий работы, повышение робастности системы;

- выбор варианта структурной схемы проектируемого системы и формулировка технических требований к структурным элементам.

Применение вариационных принципов для синтеза оптимальных систем совместного оценивания и управления состоянием стохастическими нестационарными нелинейными динамическими объектами приводит к двухточечным краевым задачам (ДТКЗ). Решение и структурная интерпретация полученных векторно-матричных уравнений в большинстве практических случаев затруднительны или невозможны ввиду чрезмерно высокой размерности, алгоритмической сложности и стоимости привлекаемых специализированных вычислителей и программных средств, обеспечивающих получение близкого к оптимальному решения в реальном масштабе времени.

В работах [5–7] изложен оригинальный подход для решения подобных задач, который называется методом инвариантного погружения. Суть инвариантного погружения заключается в том, что исходная частная задача (не обязательно двухточечная) заменяется более общей или, как говорится, погружается в более общую. Причем, часто оказывается, что задача, обобщающая частную, может быть успеш-

но решена. Зная решение общей задачи, можно соответствующим предельным переходом вернуться к исходной частной и, тем самым, найти ее точное или приближенное решение. Точность получаемого решения задачи будет определяться точностью представления искомым векторно-матричным функциям при разложении по степеням в ряд Тейлора.

Применяя вариационный принцип для синтеза оптимального регулятора нелинейной стохастической системы и метод инвариантного погружения для сведения двухточечной краевой задачи к задаче Коши, можно получить уравнения совместного оценивания – управления состоянием нелинейного объекта вида [5–7]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)\xi(t), \quad (3)$$

для сосредоточенного канала наблюдения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) + \zeta(t), \\ \mathbf{z}_2(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mu(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{z}_1(t)$  – реализация широкополосного сигнала (ШПС)  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  на выходе многоканального согласованного фильтра (СФ), зависящего от вектора параметров  $\mathbf{x}(t)$ , наблюдаемая на фоне нормального белого шума  $\zeta(t)$  с ковариационной матрицей шумов наблюдения  $\mathbf{R}_\zeta(\tau)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{z}_2(t)$  – вектор первичных параметров  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ , наблюдаемый на фоне нормального белого шума  $\mu(t)$  с ковариационной матрицей шумов наблюдения  $\langle \mu(t_0)\mu(t_0 - \tau)^T \rangle = \mathbf{R}_\mu(\tau)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{R}_\zeta(t), \mathbf{R}_\mu(t)$  – ковариационные матрицы шумов наблюдения размерностью  $P \times P$  для соответствующего нелинейного канала наблюдения;  $\mathbf{s}(t, \mathbf{x})$  – реализация наблюдаемого широкополосного (ШПС) или высокочастотного (ВЧС) сигнала (в общем случае комплексного);  $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$  – реализация наблюдаемых первичных информативных параметров на выходе устройства разового оценивания;  $P$  – число независимых каналов наблюдения;  $\xi(t), \zeta(t)$  – некоррелированные гауссовские белые шумы состояний с ковариационной матрицей  $\langle \xi(t_0)^T \xi(t_0 - \tau) \rangle = \mathbf{Q}_\xi(t)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{Q}_\xi(t)$  – матрица спектральных плотностей шумов состояний размерностью  $N \times N$ ;  $N$  – размерность системы уравнений динамики объекта управления.

Критерием оптимальности в стохастическом случае является критерий минимума среднего риска с квадратичной функцией потерь [6, 7]:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= V(\tau_k, \mathbf{x}) + \int_0^{\tau_k} (Q(t, \mathbf{x}) + U(t, \mathbf{u})) dt, \\ V(\tau_k, \mathbf{x}) &= \delta \mathbf{x}(\tau_k)^T \mathbf{A}(\tau_k) \delta \mathbf{x}(\tau_k), \\ Q(t, \mathbf{x}) &= \delta \mathbf{x}(\tau)^T \mathbf{A}(\tau) \delta \mathbf{x}(\tau), \\ \delta \mathbf{x}(\tau_k) &= \mathbf{x}_0(\tau_k) - \mathbf{x}(\tau_k), \delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0(\tau) - \mathbf{x}(\tau), \\ U(t, \mathbf{u}) &= \text{Sp}(\mathbf{A}(\tau) \mathbf{P}(\tau)) + \mathbf{u}(\tau)^T \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{u}(\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}_0(\tau)$  – заданный (требуемый) вектор состояния объекта в процессе управления;  $\mathbf{x}(\tau)$  – текущая оценка вектора фазовых координат объекта управления;  $\mathbf{P}(\tau)$  – апостериорная ковариационная матрица ошибок оценивания;  $\mathbf{A}(\tau), \mathbf{Q}(\tau)$  – симметрические положительно определенные матрицы штрафов на отклонение оценок фазовых координат от заданного значения и на величину сигнала управления;  $\text{Sp}(\mathbf{M}(\tau))$  – функция определения суммы элементов матрицы  $\mathbf{M}(\tau)$ , находящихся на главной диагонали;  $\tau_k$  – момент времени, соответствующий окончанию процесса управления.

Матрица  $\mathbf{A}(\tau)$  характеризует интегральную квадратичную оценку качества переходных процессов и величину суммарной ошибки оценивания координат. Матрица  $\mathbf{Q}(\tau)$  характеризует энергетические затраты на управление, матрица  $\mathbf{A}(\tau_k)$  характеризует величину ошибок оценивания координат в момент окончания управления.

Уравнения оптимального оценивания вектора параметров  $\mathbf{x}(t)$  и апостериорной ковариационной матрицы ошибок  $\mathbf{P}(t)$  для сосредоточенного канала наблюдения получены в работе [6, 7] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{f}_x(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{f}_x^T(t, \hat{\mathbf{x}}) + \\ &+ \mathbf{P}(t) \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{H}_0(t, \hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{h}(t, \hat{\mathbf{x}}))) \mathbf{P}(t) + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(t) + \\ &+ \mathbf{P}(t) \mathbf{H}_0(t, \hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{h}(t, \hat{\mathbf{x}})), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_x(t, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \mathbf{h}_x(t, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{h}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_0(t, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}_x(t, \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1}.$$

где  $\mathbf{H}_0(t, \hat{\mathbf{x}})$  – опорный сигнал блока оценивания.

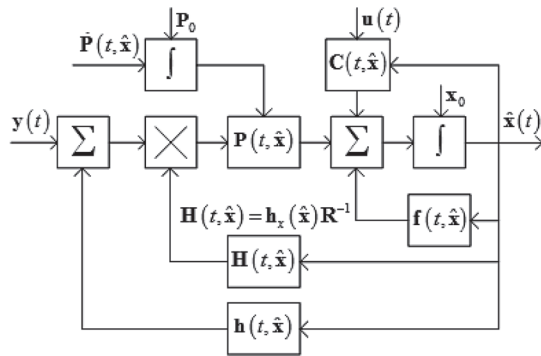


Рис. 1. Упрощенная структурная схема устройства оценивания векторного параметра

Структура устройства оценивания параметров нелинейного ОУ представлена на рис. 1.

При использовании в качестве первичной информации ШПС вида

$$y_1(t) = s(x, t) + \zeta(t), \quad (9)$$

опорный сигнал блока оценивания вычисляется как:

$$S_0(t, \hat{x}) = s_x(t, \hat{x})^T R(t)^{-1} s_x(t, \hat{x}) = \frac{\partial s(t, \hat{x})}{\partial \hat{x}}. \quad (10)$$

Из выражения для третьего слагаемого второго уравнения для оценки матрицы апостериорной дисперсии  $P(t)$  при некоррелированных шумах наблюдений получим:

$$\begin{aligned} T(\hat{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( h_x(\hat{x})^T R^{-1} (z(t) - h(\hat{x})) \right) = \\ &= -h_x(\hat{x})^T R^{-1} h_x(\hat{x}) + \\ &+ \sum_{p=0}^{P-1} h_{pxx}(\hat{x}, t) \frac{z_p(t) - h_p(\hat{x}, t)}{R_{pp}}, \quad (11) \\ h_{pxx}(\hat{x}, t) &= \left[ \frac{\partial^2 h_p(\hat{x})}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_k} \right], p \in (0, P-1). \end{aligned}$$

где  $p \in (1, P)$  – число каналов наблюдений (первичных измерений);  $R_{jk}$  – элемент ковариационной матрицы шумов наблюдения.

Для коррелированных шумов наблюдения получим для  $T(\hat{x}, t)$  из следующего выражения:

$$\begin{aligned} T(\hat{x}, t) &= -h_x(\hat{x})^T R^{-1} h_x(\hat{x}) + \\ &+ \sum_{p=0}^{P-1} h_{pxx}(\hat{x}, t) v_p(\hat{x}, t), \quad (12) \\ v_p(\hat{x}, t) &= \sum_{k=0}^{P-1} R_{pk}^{-1} (z_k(t) - h_k(\hat{x}, t)). \end{aligned}$$

Уравнения оптимального управления получены в [6, 7] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= C(t)^+ \Gamma(t) A(t) (x_0(t) - \hat{x}(t)), \\ \dot{\Gamma}(t) &= f_x(\hat{x}) \Gamma(t) + \Gamma(t) f_x(\hat{x})^T + \\ &+ C(t) B(t) C(t)^T - \Gamma(t) f_x(\hat{x}) \Gamma(t), \quad (13) \\ C(t)^+ &= (C(t)^T C(t))^{-1} C(t)^T. \end{aligned}$$

где  $C(t)^+$  – псевдообратная матрица для исходной матрицы  $C(t)$ .

При использовании МП РТС (в том числе – на борту носителей воздушного базирования), уравнения оценивания существенно усложняются. Структура устройства и алгоритмы оценивания координат для указанного случая будут рассмотрены в дальнейшем.

### Оптимальное оценивание при использовании широкополосных сигналов

Широкополосные сигналы характерны для задач радиолокации, радиосвязи, радионавигации и радиоуправления. В информативных параметрах таких сигналов закодирована информация о координатах и производных координат управляемого динамического объекта (например, ракеты). В качестве примера приведем форму записи комплексного сигнала на входе согласованного фильтра (СФОС):

$$\dot{s}_j(t, \alpha) = \dot{a}_j(t, \alpha_j) \exp(i\varphi_j(t, \alpha_j)), \quad (14)$$

где  $\dot{a}_j(t, \alpha_j)$  – комплексная амплитуда сигнала на выходе  $j$ -го канала обработки;  $\varphi_j(t, \alpha_j)$  – фаза сигнала на выходе  $j$ -го канала обработки;  $\alpha_j = \lambda_j(x)$  – вектор информативных параметров сигнала, являющийся в общем случае нелинейной функцией векторного аргумента  $x$ . Так, например, вектор  $\alpha_j$  может быть представлен в виде

$$\alpha_j = \lambda_j(\Delta\tau_0, \delta f_0, \delta\psi_0, \Delta\varepsilon_0, \Delta\beta_0), \quad (15)$$

где  $\Delta\tau_0$  – время запаздывания (разность времени запаздывания) для опорного и  $j$ -го каналов обработки;  $\delta f_0$  – доплеровское смещение частоты (разность доплеровских частот) принятого сигнала в опорном и  $j$ -ом каналах обработки;  $\delta\psi_0$  – разность фаз между опорным и  $j$ -ым каналами обработки;  $\Delta\varepsilon_0, \Delta\beta_0$  – отклонение в картинной плоскости направления на наблюдаемый объект (по углу места и азимуту) от опорного (равносигнального) направления.

По результатам разовой оценки информативных параметров сигнала может быть восстановлен вектор наблюдаемых параметров (первичных измерений). Затем, с учетом нелинейной многомерной стохастической дифференциальной связи и могут быть получены сглаженные оценки переменных состояний наблюдаемого объекта, а также вектор оптимального управления  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  в соответствии с векторно-матричными уравнениями.

Если выходные сигналы радиотехнических датчиков являются широкополосными с базой (100–10000) и более (например, ЛМЧ или КФМ сигналы), то последние слагаемые в правых частях уравнений и оптимального оценивания при замене  $\mathbf{h}_x(t, \hat{\mathbf{x}})$  и  $\mathbf{s}_x(t, \hat{\mathbf{x}})$  выражениями, связывающие входные сигналы и оценки, будут содержать быстроизменяющиеся функции времени. Инерционность оптимального блока оценивания и блока точности в первом приближении (по порядку величины) определяется инерционностью объекта [7]. В силу этого быстрофлуктуирующие составляющие будут усредняться в сглаживающих цепях как блока оценивания векторного параметра, так и блока точности (блока расчета апостериорной ковариационной матрицы ошибок оценивания).

Найдем вклад широкополосных составляющих в решение уравнения оптимальной оценки. Для этого раскроем скобки в выражении при использовании в качестве наблюдений вектор  $\mathbf{z}_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0(t, \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{z}_1(t) - \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})) = \\ = \frac{\partial \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{z}_1(t) - \mathbf{S}_0(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (16)$$

В уравнении второе слагаемое непосредственно не зависит от наблюдений  $\mathbf{z}_1(t)$ , и в силу широкой полосы сигнала (быстрых флуктуаций)  $\mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})$  должно быть заменено средним по времени за период модуляции:

$$M\{\mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})\} = \langle \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}}) dt. \quad (17)$$

где  $T$  – период повторения последовательности ШПС.

Как правило, производится двукратное усреднение: на первом этапе – в пределах периода модуляции путем внутрипериодной обработки в СФОС, на втором этапе – в пределах периода повторения ограниченной на интерва-

ле радиолокационного контакта последовательности (этап междупериодной обработки). Причем, усреднение может выполняться как с учетом междупериодного набега фазы (когерентное накопление), так и без учета фазовых сдвигов (некогерентное накопление). При больших ОСШ на входе СФ, превышающих (14–17) дБ, когерентное накопление не имеет преимуществ перед некогерентным суммированием огибающей [2].

Таким образом, вклад в оценку  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  последнего слагаемого в (16) будет равен:

$$\mathbf{b}(t, \hat{\mathbf{x}}) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}}) \right\rangle. \quad (18)$$

Поскольку матрица интенсивности помех (шумов) в канале наблюдения  $\mathbf{R}(t)$  является симметричной, то таким же свойством обладает и обратная матрица. С учетом симметричности обратной ковариационной матрицы помех в канале наблюдения, выражение примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}, \\ \mathbf{q}(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \left\langle \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\mathbf{q}(t, \hat{\mathbf{x}})$  – ОСШ в полосе частот полезного сигнала;  $\mathbf{b}(t, \hat{\mathbf{x}})$  – величина, характеризующая чувствительность ОСШ к изменению величины оценки  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Уравнение оптимального оценивания примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{u}(t) + \\ &+ \mathbf{P}(t) (\mathbf{S}_0(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{z}(t) - \mathbf{b}(t, \hat{\mathbf{x}})), \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогичные упрощения можно провести для блока точности:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{f}_x(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{f}_x^T(t, \hat{\mathbf{x}}) + \\ &+ \mathbf{P}(t) \mathbf{D}(t, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{P}(t) + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T, \\ \mathbf{D}(t, \hat{\mathbf{x}}) &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{R}^{-1}(t) \frac{\partial \mathbf{s}(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}^T} \right\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\mathbf{D}(t, \hat{\mathbf{x}})$  – ОСШ для производных сигнала по оцениваемым координатам. В связи с выполнением условия  $\langle \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = \mathbf{0}$  в выражении опущено слагаемое, содержащее разность входного и опорного сигналов.

Отличительной особенностью является то, что в нем не фигурируют в явном виде наблюде-

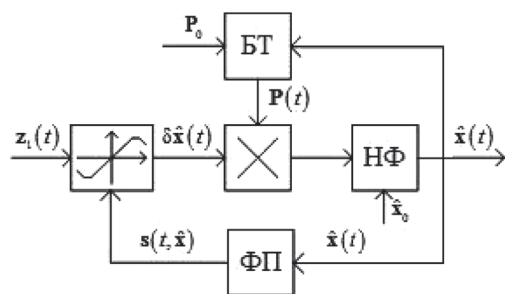


Рис. 2. Обобщенная структурная схема устройства оптимального оценивания

ния  $z_1(t)$ , ни сигнал  $s(t, \hat{x})$ . Это в значительной мере облегчает решение уравнения и, следовательно, оценку потенциальной точности оптимального устройства оценивания. Структурная схема оптимального устройства оценивания в обобщенном виде представлена на рис. 2.

Схема состоит из дискриминатора, формирующего сигнал ошибки между истинным

и оценочным значением параметра, нелинейного фильтра НФ, функционального преобразователя ФП (блока опорных сигналов) и блока точности БТ.

### Заключение

1. Рассмотрен аналитический метод синтеза устройства совместного оценивания-управления на основе многомерной нелинейной стохастической модели объекта управления с использованием метода инвариантного погружения для решения ДТКЗ.

2. Приведены дифференциальные векторно-матричные уравнения, описывающие алгоритм функционирования оптимального измерителя-регулятора, формирующего оценки вектора измеряемых параметров и вектора управления для различных вариантов построения каналов наблюдения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев, В. С. Системы управления и динамика полета ракет / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Д. И. Гладков; под ред. В. С. Пугачева. – М.: ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1965. – 615 с.
2. Максимов, М. В. Радиоэлектронные системы самонаведения / М. В. Максимов, Г. И. Горгонов – М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.
3. Колесников, А. А. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. / А. А. Колесников, А. Г. Гельфгат. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 304 с.
4. Маркевич, В. Э. Аналитический синтез метода наведения сверхзвукового беспилотного летательного аппарата на основе многомерной нелинейной динамической модели. / В. Э. Маркевич // Информатика. – 2017. – № 2 (54). – с. 93–112.
5. Касты, Дж. Методы погружения в прикладной математике. / Дж. Касты, Р. Калаба. – М.: Мир, 1976. – 223 с.
6. Сейдж, Э. Теория оценивания и ее применение в связи и навигации. Пер. с англ. / Э. Сейдж, Дж. Мелс; под ред. Б. Р. Левина. – М.: Радио, 1976. – 496 с.
7. Марков, Л. Н. Основы построения ЗРК. Ч.1. Аналитическое проектирование систем оценивания состояний объектов. Ч.2. Аналитическое проектирование систем управления объектами. / Л. Н. Марков. – Мн.: МВИЗРУ, 1980. – 162 с.

### REFERENCES

1. Pugachev, V. S. Control systems and dynamics of flight of missiles / V. S. Pugachev, I. E. Kazakov, D. I. Gladkov; under the editorship of V. S. Pugachev. – M.: HMIA of prof. N. E. Zhukovsky, 1965. – 615 p.
2. Maximov, M. V. The radio-electronic systems of homing / M. V. Maximov, G. I. Gorgonov – M.: Radio and communication, 1982. – 304 p.
3. Kolesnikov, A. A. Designing multi-criteria control systems for industrial facilities. / A. A. Kolesnikov, A. G. Gelfgat. – Moscow: Energoatomizdat, 1993. – 304 p.
4. Markevich, V. E. Analytical synthesis of a method of guidance of the supersonic unmanned aerial vehicle on the basis of multidimensional nonlinear dynamic model. / V. E. Markevich // Informatics. – 2017. – No. 2 (54). – pp. 93–112.
5. Kasti J. Immersion methods in applied mathematics. / J. Casty, R. Calaba. – Moscow: Mir, 1976. – 223 p.
6. Sage, E. Theory of estimation and its application in communication and navigation. Trans. with English. / E. Sage, J. Mels; under the editorship of B. R. Levin. – M: Radio, 1976. – 496 p.
7. Markov, L. N. Fundamentals of the design of anti-aircraft systems. P. 1. Analytical design of systems for estimating the states of objects. P. 2. Analytical design of control systems of objects. / L. N. Markov. – Minsk: MHIAAU, 1980. – 162 p.

Поступила  
16.10.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

MARKEVICH V. E., LEGKOSTUP V. V.

## ANALYTICAL DESIGN OF THE MISSILE CONTROL DEVICE TO INTERCEPT AERODYNAMIC TARGET

*The analytical method of synthesis of devices for joint optimal estimation of parameters and control of the state of nonlinear dynamic stochastic objects is considered. A brief review of the existing and promising methods of missile guidance, as well as a comparative description of the advantages and disadvantages. Methods of improving accuracy and jamming-resistance methods of guidance, one of which is an approach based on joint estimation and state control of nonlinear object with random driving and interfering influences.*

*The main directions of research on this subject, including statistical synthesis of the optimal control system, estimation of the potential characteristics of the designed system, analysis of the structure of the optimal system and evaluation of its simplification, the formation of quasi-optimal structures of the control system, evaluation of the criticality (sensitivity) of the system characteristics to changes in a priori information.*

*The choice of the invariant immersion method for the analytical design of the structure of the optimal evaluation-control device is substantiated. Analytical expressions describing the algorithm of functioning of the device of joint estimation and control of the state of a multidimensional nonlinear multi-connected object are given.*

**Keywords:** proportional navigation method, guided missile, synthesis of the optimal estimation device – control, synthesis of optimal estimation-control device, invariant immersion method.



**Маркевич Виталий Эдмундович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП», г. Минск, пр-т Независимости, д. 95/7, к. 16, e-mail: mark.vit@tut.by.

Мобильные телефоны для связи (персональный): +375 (29) 169-69-70, +375 (29) 508-01-73.

**Markevich Vitaliy Edmundovich** – Candidate of Engineering Sciences, leader scientist, OJSC «ALEVKURP». e-mail: mark.vit@tut.by.



**Легкоступ Виктор Валерьевич** – аспирант БГУИР, младший научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП», г. Минск, пр-т Независимости, д. 95/7, к. 16. e-mail: legkostupvv@gmail.com

Мобильные телефоны для связи (персональный): +375 (33) 682-43-02, городские телефоны для связи (общие): +375 (17) 280-91-67,

**Legkostup Victor Valeryevich** – post-graduate student of BSUIR, junior researcher, OJSC «ALEVKURP», e-mail: legkostupvv@gmail.com.

А. Г. СТРИЖНЕВ, А. А. ШИХОВ

## СПОСОБЫ РЕДУЦИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ И ФОРСИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

НПООО «ОКБ ТСП»

*Предложены способы редуцирования моделей объектов управления, содержащих колебательные и форсирующие звенья, основанные на использовании модуля квадратного уравнения и коэффициента разложения, делающих их дискриминант равным или больше нуля. Способы позволяют учитывать изменения коэффициентов передачи в процессе редуцирования моделей объектов и провести предельное упрощение квадратных уравнений колебательных и форсирующих звеньев. Порядок редуцированных моделей объектов уменьшается, а их работа близко совпадает с исходной моделью. При этом значительно упрощается синтез корректирующих устройств, работа которых в составе систем управления осуществляется с перерегулированием (не превышающим 10–17%), которое может быть уменьшено выбором общего коэффициента усиления системы. Приведены примеры редуцирования реальных моделей объектов управления, синтеза цифровых корректирующих устройств и проверки их работы путем моделирования.*

**Ключевые слова:** объект управления, модель, колебательные и форсирующие звенья, редуцирование, синтез, корректирующее устройство, моделирование.

### Введение

При проектировании систем автоматического управления (САУ), содержащих непрерывные объекты управления (ОУ), обычно стремятся максимально упростить (редуцировать) их модели, сохранив при этом их основные динамические свойства. Такая процедура позволяет получить дифференциальное уравнение, описывающее реальный объект, как правило, второго порядка [1, 2] и тем самым облегчить расчет цифровых корректирующих устройств (ЦКУ). Существуют различные способы редуцирования моделей ОУ, однако на практике находят применения те из них, которые не требуют сложных аналитических расчетов. Наиболее просто это можно осуществить путем отбрасывания тех сомножителей модели ОУ, которые содержат наименьшие постоянные времени [1]. Другой путь заключается в замене постоянных времени одним суммарным запаздыванием и сокращении близких друг к другу нулей и полюсов передаточной функции объекта [1]. Такие подходы обеспечивают низкую точность редуцирования и не предусматривают изменение коэффициента

передачи модели ОУ. Редуцировать модель ОУ можно и путем сохранения присущего реальной модели значения частоты среза и фазочастотной характеристики на этой частоте [2]. В этом случае расчет получается сложным, результаты неточными, а редуцированная модель не отражает свойства полной модели. Существующие современные методы редуцирования объектов и систем [3] из-за сложности расчетов на практике находят ограниченное применение. Рассмотренные подходы имеют право на существование и не отрицают другие способы редуцирования моделей ОУ, которые разработаны и в дальнейшем будут рассмотрены.

### Способы редуцирования моделей объектов управления

Многие модели объектов управления содержат колебательные звенья вида:

$$G_1(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\alpha}{s^2 + bs + a}, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент усиления в установившемся состоянии;  $T$  – постоянная времени;  $\xi$  – коэффициент относительного демпфирования;  $\alpha = k/T^2$ ;  $a = 1/T^2$ ;  $b = 2\xi/T$  – коэффициенты.

Когда  $0 < \xi < 1$  и выполняется условие  $b^2 - 4a < 0$ , разложить колебательное звено (1) на два апериодических звена нельзя. Вместе с тем для многих практических применений требуется, пусть даже приближенно, редуцировать модель объекта, содержащего колебательное звено.

Наиболее просто это можно сделать путем определения комплексно сопряженных корней  $x = -b/2 \pm i\sqrt{(b/2)^2 - a}$  квадратного уравнения (1) и нахождения их модуля без учета знаков.

В результате выражение (1) преобразуется к виду:

$$G_2(s) = \frac{\alpha_1}{(s+m)^2}, \quad (2)$$

где  $m = \sqrt{(b/2)^2 + |(b/2)^2 - a|} = \sqrt{a}$  – модуль квадратного уравнения (1),  $\alpha_1 = \alpha m^2/a$  – коэффициент передачи.

Редуцировать колебательное звено можно и путем увеличения коэффициента  $b$  и уменьшения коэффициента  $a$  так, чтобы дискриминант квадратного уравнения (1) стал  $D = (\lambda b/2)^2 - (a/\lambda) \geq 0$ , где  $\lambda$  – коэффициент разложения. Откуда получим выражение для определения коэффициента разложения  $\lambda \geq \sqrt[3]{4a/b^2}$  и новые коэффициенты модели объекта  $a_1 = a/\lambda$ ,  $b_1 = b\lambda$ ,  $\alpha_1 = \alpha a_1/a$ . Причем, если выполнить условие  $\lambda \approx \sqrt[3]{4a/b^2}$ , то модель объекта можно представить в виде (2), где  $m = b_1/2$  и  $\alpha_1 = \alpha m^2/a$ , а если выполнить условие  $\lambda \gg \sqrt[3]{4a/b^2}$ , то модель объекта можно представить двумя апериодическими звеньями.

Проведенные процедуры позволяют в дальнейшем провести предельное редуцирование без аналитического вывода:

$$G_3(s) = \frac{\alpha_2}{s+2m}, \quad (3)$$

где  $\alpha_2 = 2\alpha m/a$ .

Многие модели объектов содержат не только колебательное, но и форсирующее звено первого порядка в виде:

$$G_4(s) = \frac{\alpha(s+r)}{s^2+bs+a}. \quad (4)$$

Из-за потери свойств объекта нельзя исключать форсирующее звено из состава модели. В данном случае можно редуцировать

только квадратное уравнение и получить модель ОУ в виде:

$$G_5(s) = \frac{\alpha_2(s+r)}{s+2m}, \quad (5)$$

где  $\alpha_2 = 2\alpha m/a$ .

Некоторые модели объектов содержат колебательное и форсирующее звено второго порядка:

$$G_6(s) = \frac{\alpha(s^2+ds+c)}{s^2+bs+a}. \quad (6)$$

Редуцировать модель (6) можно путем определения модулей квадратных уравнений  $n = \sqrt{c}$ ,  $m = \sqrt{a}$  и вычисления  $2n$ ,  $2m$ . В результате получим модель ОУ в виде:

$$G_7(s) = \frac{\alpha_3(s+2n)}{s+2m}, \quad (7)$$

где  $\alpha_3 = \alpha cm/an$ .

Редуцировать модель (6) можно и иначе. Представить числитель и знаменатель в виде  $s^2+ds+c = (s+m)(s+x_i)$  и  $s^2+bs+a = (s+m)^2$ , приравнять коэффициенты  $d = m + x_i$ ,  $c = mx_i$  и с учетом выполнения условий  $x_1 = d - m$ ,  $x_2 = c/m$  выбрать требуемую  $x_i$ . При этом предельно редуцированная модель объекта будет иметь вид:

$$G_8(s) = \frac{\alpha_4(s+x_i)}{s+m}, \quad (8)$$

где  $\alpha_4 = \alpha cm/ax_i$ .

Редуцировать модель объекта (6) можно по-другому. Представить числитель и знаменатель в виде  $s^2+ds+c = (s+n)^2$  и  $s^2+bs+a = (s+n)(s+x_i)$ , приравнять коэффициенты  $b = n + x_i$ ,  $a = nx_i$  и с учетом выполнения условий  $x_i = d - m$ ,  $x_2 = c/m$  выбрать требуемую  $x_i$ . При этом предельно редуцированная модель объекта будет иметь вид:

$$G_9(s) = \frac{\alpha_5(s+n)}{s+x_i}, \quad (9)$$

где  $\alpha_5 = \alpha cx_i/an$ .

Для проверки предложенных способов осуществим редуцирование моделей реальных объектов управления.

### Примеры редуцирования моделей реальных объектов управления

*Пример 1.* Рассмотрим гидравлический привод, передаточная функция которого имеет вид:

$$M(s) = \frac{\alpha(s+r)}{s(s^2+bs+a)}, \quad (10)$$

где  $\alpha = 4,0797 \text{ с}^{-2}$ ,  $a = 48,2588 \text{ с}^{-2}$ ,  $b = 4,5877 \text{ с}^{-1}$ ,  $r = 1,6289 \text{ с}^{-1}$ .

Дискриминант  $D \equiv (b/2)^2 - a \approx -42,9971$  квадратного уравнения меньше нуля, и разложить колебательное звено на два апериодических звена нельзя.

Определим модуль квадратного уравнения (10)  $m = \sqrt{a} = 6,9469$ , вычислим  $2m = 13,8937$  и получим редуцированную модель объекта в виде:

$$M_1(s) = \frac{\alpha_1(s+r)}{s(s+2m)}, \quad (11)$$

где  $\alpha_1 = \alpha 2m/a = 1,1746$ .

Для проверки редуцирования были составлены схемы объектов [4–6], и осуществлено моделирование их работы. Результаты приведены на рис. 1. Работа объекта (10) и его редуцированной модели (11) близко совпадают (рис. 1, б).

*Пример 2.* Рассмотрим гидравлический привод, передаточная функция которого имеет другой вид:

$$M_2(s) = \frac{\alpha(s^2+ds+c)}{s(s^2+bs+a)}, \quad (12)$$

где  $\alpha = 0,148 \text{ с}^{-2}$ ,  $a = 56,25 \text{ с}^{-2}$ ,  $b = 6,0 \text{ с}^{-1}$ ,  $c = 110,2 \text{ с}^{-2}$ ,  $d = 3,36 \text{ с}^{-1}$ .

Дискриминанты  $D_1 \equiv (d/2)^2 - c = -107,3776$ ,  $D_2 \equiv (b/2)^2 - a = -47,25$  меньше нуля, и квадратные уравнения имеют два комплексно сопряженных корня.

Определим модули квадратных уравнений  $n = \sqrt{c} = 10,4976$ ,  $m = \sqrt{a} = 7,5$ , вычислим

$2n = 20,9952$ ,  $2m = 15$  и получим редуцированную модель объекта (12) в виде:

$$M_3(s) = \frac{\alpha_2(s+2n)}{s(s+2m)}, \quad (13)$$

где  $\alpha_2 = \alpha cm/an = 0,2072$ .

Разложим квадратные уравнения числителя и знаменателя (12) на множители  $s^2+ds+c = (s+m)(s+x_1)$  и  $s^2+bs+a = (s+m)^2$ , приравняем коэффициенты  $d = m+x_1$ ,  $c = mx_1$  и получим  $x_1 = d-m = -1,5$ ,  $x_2 = c/m = 14,6933$ . Определим коэффициенты передачи объекта

$$\alpha_3 = \frac{\alpha cm}{ax_1} = -1,4497, \quad \alpha_4 = \frac{\alpha cm}{ax_2} = 0,1480$$

и с учетом физической реализации получим редуцированную модель объекта:

$$M_4(s) = \frac{\alpha_4(s+x_2)}{s(s+m)}. \quad (14)$$

Разложим квадратные уравнения числителя и знаменателя (12) на множители  $s^2+ds+c = (s+n)^2$  и  $s^2+bs+a = (s+n)(s+x_3)$ , приравняем коэффициенты  $b = n+x_3$ ,  $a = nx_4$  и получим  $x_3 = b-n = -4,4976$ ,  $x_4 = a/n = 5,3584$ . Определим коэффициенты передачи объекта

$$\alpha_5 = \frac{\alpha cx_3}{an} = -0,1242, \quad \alpha_6 = \frac{\alpha cx_4}{an} = 0,1480$$

и с учетом физической реализации получим редуцированную модель объекта:

$$M_5(s) = \frac{\alpha_6(s+n)}{s(s+x_4)}. \quad (15)$$

Для проверки редуцирования были составлены схемы объектов [4–6], и осуществлено моделирование их работы. Результаты приведены на рис. 2. Работа объекта (12) и его редуцированных моделей (13–15) близко совпадают (рис. 2, б).

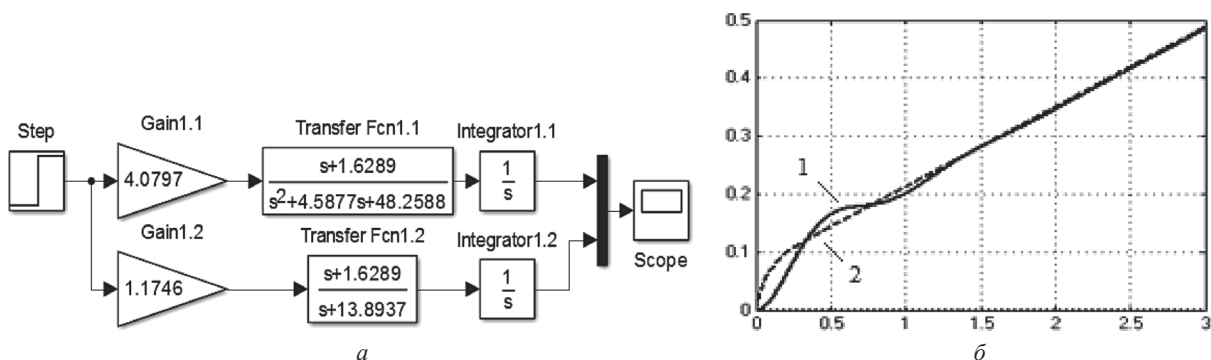


Рис. 1. Работа объектов: а – схема моделирования; б – результаты моделирования: 1 – полная модель; 2 – редуцированная модель

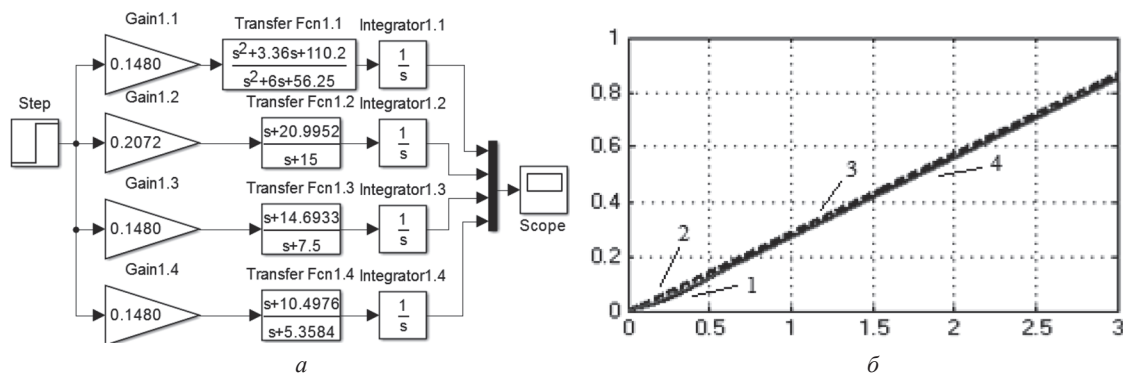


Рис. 2. Работа объектов: *а* – схема моделирования; *б* – результаты моделирования: 1 – полной модели; 2–4 – редуцированных моделей

Окончательная проверка работы моделей может быть проведена в составе САУ при наличии соответствующих ЦКУ. С этой целью для объектов (10–15) необходимо осуществить синтез ЦКУ.

### Синтез цифровых корректирующих устройств

Для синтеза ЦКУ и обеспечения требуемых динамических свойств САУ можно использовать различные типы корректирующих устройств (регуляторов) [1, 7–9]: цифровые ПИД-регуляторы, оптимальные по быстродействию цифровые регуляторы, цифровые регуляторы на основе нечеткой логики функционирования, цифровые регуляторы в цепи гибкой обратной связи и др. С учетом, что передаточные функции (10–15) содержат форсирующие звенья, которые ограничивают применение многих известных корректирующих устройств, в дальнейшем будет использован метод придания одноконтурной замкнутой САУ требуемых фильтрующих свойств [10]. Суть метода состоит в применении специального ЦКУ, который обеспечивает требуемую полосу пропускания и показатели качества работы следящей системы. Для определения передаточной функции КУ в аналоговом виде, нужно использовать выражение:

$$W(s) = \frac{F(s)}{D(s)[1 - F(s)]}, \quad (16)$$

где  $W(s)$  – передаточная функция КУ,  $D(s)$  – передаточная функция объекта управления,  $F(s)$  – передаточная функция эталонного фильтра низкой частоты ФНЧ.

Применительно к объектам (10, 12) использован ФНЧ  $F(s) = 1/(Ts + 1)^3$ ,  $T = 0,1699$  с,

$\omega = 3$ ,  $N = 0,8909$ , и определены передаточные функции КУ в аналоговом виде:

$$V_{10}(s) = V_0 \frac{s^2 + c_1 s + c_2}{s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3},$$

$$V_{12}(s) = V_0 \frac{s^2 + c_1 s + c_2}{s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4}. \quad (17)$$

Применяя к выражениям (17) билинейную аппроксимацию (преобразование Тастина) [11]

$$s \approx \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

где  $h$  – шаг квантования, получены передаточные функции ЦКУ:

$$W_{10}(z) = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}},$$

$$W_{12}(z) = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}. \quad (18)$$

Применительно к объектам (11, 13–15) использован ФНЧ  $F(s) = 1/(Ts + 1)^2$ ,  $T = 0,2145$  с,  $\omega = 3$ ,  $N = 0,8409$ , и определены передаточные функции КУ в аналоговом и цифровом виде:

$$V_{11,13-15}(s) = V_0 \frac{s + c_1}{s^2 + d_1 s + d_2},$$

$$W_{11,13-15}(z) = K_0 \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (19)$$

Таблица. Параметры КУ для различных объектов

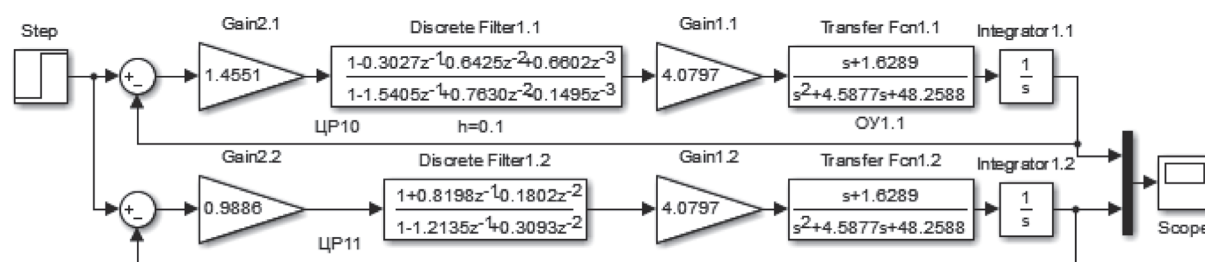
| № объекта | Параметры аналоговых КУ                                                                                                   | Параметры цифровых КУ                                                                                                                                                           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10        | $V_0 = 49,9431$ , $c_1 = 4,5877$ ,<br>$c_2 = 48,2588$ , $d_1 = 19,2821$ ,<br>$d_2 = 132,6333$ , $d_3 = 169,2069$ .        | $b_1 = -0,3027$ , $b_1 = -0,3027$ , $b_2 = -0,6425$ ,<br>$b_3 = 0,6602$ , $a_1 = -1,5405$ , $a_2 = 0,7630$ ,<br>$b_3 = -0,1495$ , $h = 0,1$ с.                                  |
| 11        | $V_0 = 18,4981$ , $c_1 = 13,8937$ ,<br>$d_1 = 10,9515$ , $d_2 = 15,1856$ .                                                | $K_0 = 0,9886$ , $b_1 = 0,8198$ , $b_2 = -0,1802$ ,<br>$a_1 = -1,2135$ , $a_2 = 0,3093$ , $h = 0,1$ с.                                                                          |
| 12        | $V_0 = 1376,71$ , $c_1 = 6$ , $c_2 = 56,25$ ,<br>$d_1 = 21,01$ , $d_2 = 273,39$ ,<br>$d_3 = 2294,41$ , $d_4 = 11447,36$ . | $K_0 = 1,6033$ , $b_1 = 0,8069$ , $b_2 = -0,8026$ ,<br>$b_3 = -0,0260$ , $b_4 = 0,5835$ , $a_1 = -1,6949$ ,<br>$a_2 = 1,6370$ , $b_3 = -0,7069$ , $b_4 = 0,1350$ , $h = 0,1$ с. |
| 13        | $V_0 = 104,86$ , $c_1 = 15$ ,<br>$d_1 = 30,3178$ , $d_2 = 195,73$ .                                                       | $K_0 = 3,0532$ , $b_1 = 0,8571$ , $b_2 = -0,1429$ ,<br>$a_1 = -0,3399$ , $a_2 = -0,0088$ , $h = 0,1$ с.                                                                         |
| 14        | $V_0 = 146,81$ , $c_1 = 7,5$ ,<br>$d_1 = 24,0159$ , $d_2 = 136,98$ .                                                      | $K_0 = 3,9686$ , $b_1 = 0,5455$ , $b_2 = -0,4525$ ,<br>$a_1 = -0,5171$ , $a_2 = 0,0557$ , $h = 0,1$ с.                                                                          |
| 15        | $V_0 = 146,81$ , $c_1 = 5,3584$ ,<br>$d_1 = 19,8202$ , $d_2 = 97,87$ .                                                    | $K_0 = 4,1630$ , $b_1 = 0,4226$ , $b_2 = -0,5774$ ,<br>$a_1 = -0,6757$ , $a_2 = 0,1135$ , $h = 0,1$ с.                                                                          |

Параметры КУ для различных объектов приведены в таблице.

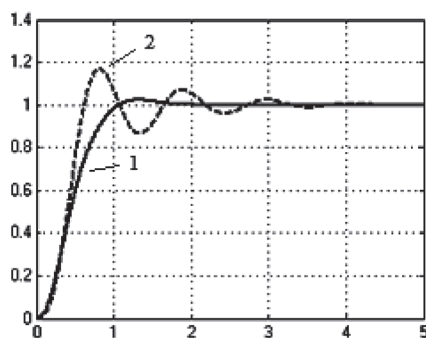
Для проверки работы регуляторов  $W_{10,11}(z)$  были составлены схемы САУ [4–6], и осуществлено моделирование их работы. Результаты приведены на рис. 3. Работа САУ с регуляторами  $W_{10,11}(z)$  близко совпадают (рис. 3, б). При работе САУ с регулятором  $W_{11}(z)$ , рассчитанным на редуцированную модель объекта (10), наблюдается перерегулирование не более 17%,

которое может быть уменьшено выбором общего коэффициента усиления  $K_0$ .

Для проверки работы регуляторов  $W_{12-15}(z)$  были составлены схемы САУ [4–6], и осуществлено моделирование их работы. Результаты приведены на рис. 4. Работа САУ с регуляторами  $W_{12-15}(z)$  близко совпадают (рис. 4, б), а перерегулирование не превышает 10%, которое может быть уменьшено выбором общего коэффициента усиления  $K_0$ .



а



б

Рис. 3. Работа САУ: а – схема моделирования; б – результаты моделирования: 1 – ЦП10; 2 – ЦП11

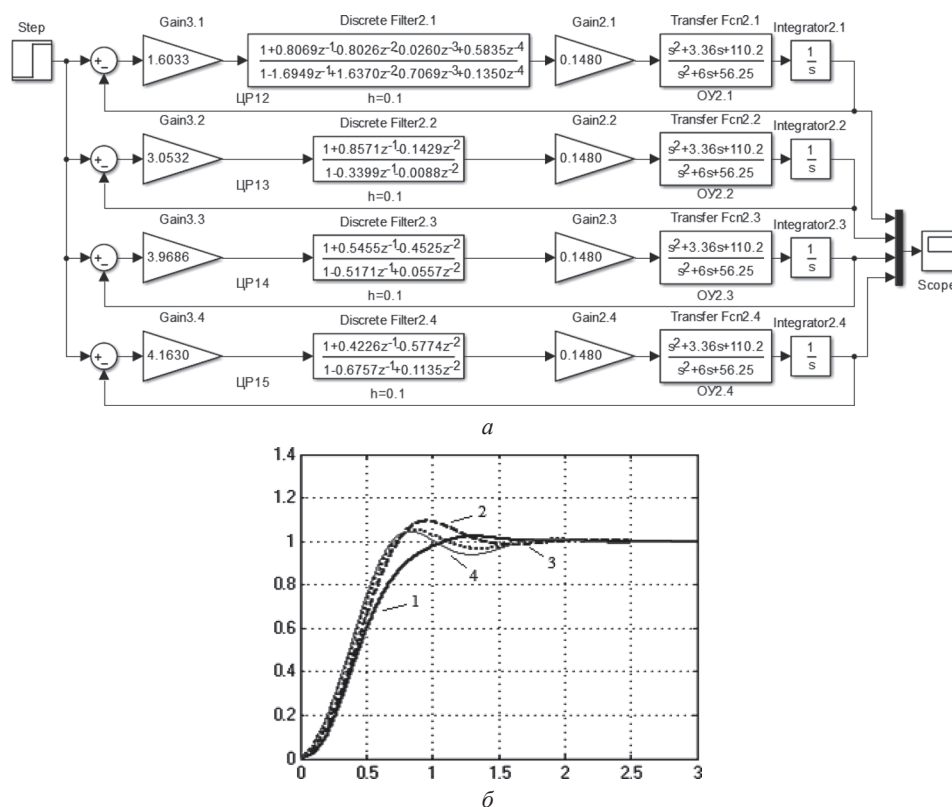


Рис. 4. Моделирование работы САУ: а – схема моделирования; б – результаты моделирования: 1 – ЦР12; 2 – ЦР13; 3 – ЦР14; 4 – ЦР15

### Заключение

Разработаны, проверены и предложены к применению новые способы редуцирования моделей объектов, которые содержат колебательные и форсирующие звенья первого и второго порядка. Новым является то, что редуцирование колебательных звеньев осуществляется последовательным представлением сначала апериодическим звеном второго порядка (с использованием модуля квадратного уравнения  $m = \sqrt{a}$ ) с последующей заменой его апериодическим звеном с удвоенной постоянной времени. Редуцировать колебательные звенья можно также путем увеличения коэффициента  $b$  и уменьшения коэффициента  $a$  так, чтобы дискриминанты квадратных уравнений стали  $D = (\lambda b/2)^2 - (a/\lambda) \geq 0$ , где  $\lambda \geq \sqrt[3]{4a/b^2}$  – коэффициент разложения. Во всех случаях требуется уточнить коэффициент передачи объекта, используя выражения  $\alpha_1 = \alpha m^2/a$ ,  $\alpha_2 = \alpha 2m/a$ .

При наличии форсирующего звена первого порядка не следует его исключать из модели, т.к. это приведет к потере свойств объекта. В случае наличия форсирующего звена второго порядка, его можно упростить, по аналогии с колебательным звеном, или разложить квадратные уравнения на множители с последующим их сокращением. Во всех случаях требуется уточнить коэффициент передачи объекта используя выражения  $\alpha_3 = \alpha sm/ax_i$ ,  $\alpha_4 = \alpha cx_i/an$ .

Работа редуцированных моделей объектов близко совпадает (рис. 1, б; рис. 2, б), а их порядок уменьшается. При этом значительно упрощается синтез цифровых корректирующих устройств, качество работы которых в составе САУ остается приемлемым (рис. 3, б; рис. 4, б) с перерегулированием не превышающим 10–17%, которое может быть уменьшено выбором общего коэффициента усиления цифрового корректирующего устройства  $K_0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гостев В. И. Системы автоматического управления с цифровыми регуляторами: Справочник / В. И. Гостев, В. К. Степлов. – К.: Радиоаматор, 1998. – 704 с.
2. Зимчук И. В. Редукция моделей объектов управления для синтеза простых регуляторов / И. В. Зимчук // Информатика управление и вычислительная техника: сборник научных трудов. – 2014. – № 60. – С. 122–132.

3. Романова И. К. Современные методы редукции нелинейных систем и их применение для формирования моделей движущихся объектов / И. К. Романова // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». – 2012. – С. 122–133.
  4. Терехин В. В. Основы моделирования в MATLAB. Simulink: учеб. пособие в 2 ч. Ч. 2 / В. В. Терехин. – Новокузнецк: Кузбассвуиздат, 2004. – 376 с.
  5. Tewari A. Modern control design with MATLAB and Simulink / A. Tewari. – Weinheim: Wiley, 2002. – 503 p.
  6. Nuruzzaman M. Modeling and Simulation in Simulink for Engineers and Scientists / M. Nuruzzaman. – Bloomington: Author House, 2005. – 240 p.
  7. Гостев В. И. Синтез цифровых регуляторов систем автоматического управления параметрами теплоэнергетических объектов / В. И. Гостев, В. В. Крайнев, С. Н. Скуртов. – К: Радиоаматор, 2007. – 264 с.
  8. Гостев В. И. Синтез нечетких регуляторов систем автоматического управления / В. И. Гостев. – К: Радиоаматор, 2005. – 708 с.
  9. Стрижнев А. Г. Синтез цифрового регулятора, включенного параллельно единичной обратной связи / А. Г. Стрижнев, М. К. Хаджинов, А. Н. Русакович // Доклады БГУИР. – 2014. – № 4 (82). – С. 80–86.
  10. Стрижнев А. Г. Метод придания одноконтурной замкнутой системе автоматического управления требуемых фильтрующих свойств / А. Г. Стрижнев // Системный анализ и прикладная информатика. – 2016. – № 4(12) – С. 31–37.
  11. Герман-Галкин С. Г. Цифровые электроприводы с транзисторными преобразователями / С. Г. Герман-Галкин, В. Д. Лебедев, Б. А. Марков, Н. И. Чичерин. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
- REFERENCE**
1. Gostev V. I. Automatic Control Systems within Digital Controllers: handbook / V. I. Gostev, V. K. Steklov. – K.: Radioamator, 1998. – 704 p.
  2. Zimchuk I. V. Reduction of Control Objects Models for Synthesis of Simple Controllers / I. V. Zimchuk // Informatics, Controlling and Computer Science: Collection of Scientific Papers. – 2014. – no. 60 – P. 122–132.
  3. Romanova I. K. Modern Methods of Reduction of Nonlinear Systems and Their Implementation in Formation of Moving Objects Models / I. K. Romanova // Herald of MGTU name of N. E. Bauman. Ser. «Mashinostroyeniye». – 2012. – P. 122–133.
  4. Terekhin V. V. Fundamentals of Modeling in MATLAB Simulink: tutorial in 2 p. P. 2 / V. V. Terekhin. – Novokuznetsk: Kuzbassvuzdat, 2004. – 376 p.
  5. Tewari A. Modern control design with MATLAB and Simulink / A. Tewari. – Weinheim: Wiley, 2002. – 503 p.
  6. Nuruzzaman M. Modeling and Simulation in Simulink for Engineers and Scientists / M. Nuruzzaman. – Bloomington: Author House, 2005. – 240 p.
  7. Gostev V. I. Synthesis of Digital Controllers for Closed Loop Control Systems of Heat-Power Engineering Objects' Parameters / V. I. Gostev, V. V. Krainev, S. N. Skurtov. – K.: Radioamator, 2007. – 264 p.
  8. Gostev V. I. Synthesis of Fuzzy Logic Controllers for Closed Loop Control Systems / V. I. Gostev. – K.: Radioamator, 2005. – 708 p.
  9. Stryzhniou A. G. Synthesis of the Digital Controller in the Reverse Path with Additional Unity Feedback / A. G. Stryzhniou, M. K. Khajynau, A. N. Rusakovich // Reports of BSUIR. – 2014. – no. 4(82). – P. 80–86.
  10. Stryzhniou A. G. The Method of Imparting Desired Filtering Properties for Closed Loop Control System / A. G. Stryzhniou // System analysis and applied information science – 2016. – no. 4(12) – P. 31–37.
  11. German-Galkin S. G. Digital servo drives with transistor inverters / S. G. German-Galkin, V. D. Lebedev, B. A. Markov, N. I. Chicherin. – L.: Energoatomizdat, 1986. – 248 p.

Поступила  
10.10.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

*Stryzhnev A., Shykhau A.*

## METHODS OF REDUCTION OF CONTROL OBJECTS MODELS CONTAINING OSCILLATING AND FORCING LINKS

*Scientific Production Limited Liability Company «OKB TSP»*

*Methods of reduction of control objects models containing oscillating and forcing links are proposed. Methods are based on using of quadratic equation modulus and coefficient of factorization that makes links discriminants equal or more than zero. Methods allow taking into account transfer factors alterations during reduction of objects models ant to maximum simplify quadratic equations of oscillating and forcing links. The order of reduced objects models is decreased and models behavior closely agrees with behavior of the original model. In that case synthesis of controllers is essentially simplified. Such controllers provide slight overshoot (less than 10–17%) during the work within control system. It can be reduced by changing of system gain. Examples of reduction of real control objects models and examples of synthesis of digital controllers and results of modelling are given.*



**Стрижнев Александр Гаврилович**, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НПО «ОКБ ТСП». Специалист в области систем автоматического управления с цифровыми регуляторами; цифровых следящих систем; управления гидроприводом, двигателями переменного и постоянного тока; систем стабилизации и горизонтирования. Опубликовано более 70 работ в научных журналах и трудах конференций. Автор ряда изобретений и патентов. Подготовил 2 кандидата наук.

Тел.: +375 (029) 276-70-07. E-mail: strizhnev.ag@gmail.com.

**Stryzhnev Aliaksandr Gavrilovich**, Cand. Tech. Sci., associate professor, the leading research engineer of SPLLC «OKB TSP». The expert in the field of automatic control systems, digital servo systems, hydraulic drives, AC and DC motors control, stabilization and leveling systems. He is author and coauthor more than 70 papers in scientific journals, conference proceedings. He has number of certificates and patents.

Tel.: +375 (29) 276-70-07. E-mail: strizhnev.ag@gmail.com.



**Шихов Алексей Александрович**, ведущий инженер НПО «ОКБ ТСП». Специалист в области встраиваемых систем; систем автоматического управления с цифровыми регуляторами; цифровых следящих систем; управления сервоприводом, гидроприводом, двигателями постоянного тока; шаговыми двигателями; систем стабилизации и горизонтирования. Опубликовано более 20 работ в научных журналах и трудах конференций.

Тел.: +375 (25) 955-22-86. E-mail: shihovalex@gmail.com.

**Shykhau Aliaksei Aliaksandravich**, the lead engineer of SPLLC «OKB TSP». The expert in the field of embedded systems, automatic control systems, digital servo systems, hydraulic drives, DC and stepper motors control, stabilization and leveling systems. He is author and coauthor more than 20 papers in scientific journals, conference proceedings.

Tel.: +375 (29) 955-22-86. E-mail: shihovalex@gmail.com.

**ОБРАБОТКА  
ИНФОРМАЦИИ  
И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ**

**DATA PROCESSING  
AND  
DECISION-MAKING**

УДК 004.043; 519.872

В. И. КУДРЯВЦЕВ<sup>1</sup>, О. Ф. ЗИРКО<sup>2</sup>

## ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАСЧЕТА ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ С ЦЕЛЬЮ УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

<sup>1</sup>НПФ «Адекват», Москва, Россия;<sup>2</sup>Белорусский институт системного анализа и информационного обеспечения научно-технической сферы (БелИСА), Минск

*Исследованы возможности использования математических моделей теории очередей с целью управления в реальном времени моделируемыми ней процессами дискретных производств. В качестве модельного примера рассматривалась система управления перестановками предметов обслуживания в очередях. Для анализа были использованы методы расчета управляемых ВМАР систем и методы теории восстановления на периодах занятости для очередей с вакансиями требований.*

*В результате исследования выяснено, что математическое моделирование в теории очередей может быть использовано для имитационного моделирования дискретного производства с целью проектирования и производственного анализа, но не может быть использовано для управления моделируемыми процессами в реальном времени.*

**Ключевые слова:** требование; управление в реальном времени; дискретно-событийное математическое моделирование; очередь; процесс управления системой; инженерный подход; перестановки; вакансии; ВМАР-системы.

### Введение

В дискретно-событийном математическом моделировании существуют попытки реализации задач управления процессами массового обслуживания, в которых предметы производственной и иной обработки моделируются как требования ( $R_q$ ) реализуемые в системе с обслуживающими приборами ( $S_v$ ), отображающими машины, механизмы и персонал [1]. В теории очередей (QT) сочетание  $R_q$  с  $S_v$  моделируется посредством очередей ( $Q_u$ )  $R_q$ , которые задают порядок обслуживания их в  $S_v$  и образуют совместно с  $R_q$  и  $S_v$  систему массового обслуживания ( $Q_uS$ ). В рамках QT создано множество математических моделей  $Q_uS$ , для расчета процессов так называемого дискретного производства, в котором явно выделены предметы производства, над которыми осуществляются циклические операции обслуживания. В свое время математическое моделирование объектов управления, передаточных звеньев и регуляторов в теории автоматического управления привело к взрывному развитию средств автоматического управления непрерывными процессами. Однако в случае

QT, а также других теорий дискретно-событийного моделирования, подобного эффекта для системного управления  $Q_uS$  не происходит [2]. В данной статье на примере модели сложного управления  $R_q$  в  $Q_uS$  на основе QT была сделана попытка определить причину этого явления и оценить перспективы использования расчета QT для производственного управления в реальном времени.

### Формальный математический подход QT к моделированию управления в $Q_uS$ со сложным перемещением

В QT существует класс ВМАР систем с групповым марковским входным потоком [2], в котором может моделироваться сложное поведение  $R_q$  в системе однотипных очередей. Как правило, функция управления такого рода системами в QT моделируют в виде специальной функции *CONT*. Логично предположить, что пользуясь уже существующими подходами QT, мы сможем реализовать управление для сложных производственных систем, которые моделируются в QT в виде ВМАР систем.

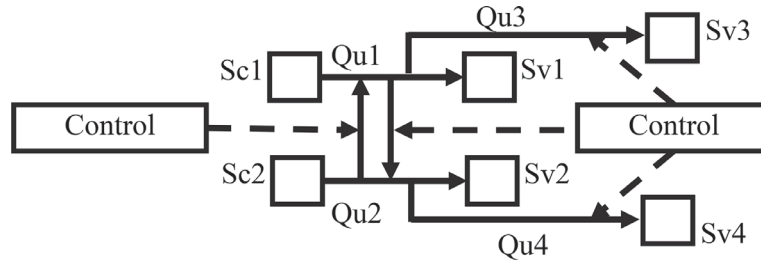


Рис. 1. Схема QuS типа ВМАР с произвольными перестановками Rq в QuS

Для анализа такого управления был разработан модельный пример, схема которого представлена на рис. 1.

Пример включает в себя две QuS типа G/G/1/m с предельным количеством Rq равном  $m$ , представленные на рисунке 1 в виде систем Sc1-Qu1-Sv1 и Sc2-Qu2-Sv2. Для Rq в этих системах был установлен верхний предел времени ожидания их реализации  $\tau$  соответственно в Sv1 и Sv2. Те Rq в Qu1 или Qu2, для которых время ожидания их реализации превышает значение  $\tau$ , направляются в другой процесс однотипной реализации Qu2 или Qu1, где по условию прохождения очереди они не превысят значение  $\tau$ . Также они могут быть отправлены в процессы не однотипной, а иной их реализации, которые отображены на рис.1 в виде систем Qu3-Sv3 и Qu4-Sv4. Все перемещения Rq между QuS осуществляются в процессе управления Control.

На основе составленной схемы был выполнен расчет вероятностей реализации  $k$ -го Rq для следующих процессов: 1) основного процесса при условии ограничения времени ожидания Rq – вероятность  $(PB_k^{M,j})_l$ ; 2) процесса в присутствии перестановок Rq между очередями – вероятность  $(PB_l^{M,j})_{rr}$ . Результаты расчетов представлены в формулах (1) и (2) соответственно:

$$\begin{aligned}
 (PB_k^{M,j})_l &= \frac{\prod_{l=0}^{k-1} \rho_l(T)}{k!} P_o(T) \times \\
 &\times (\exp(-\lambda_k(T) - \mu_k(T))T) F^{(k)}(CONT) + \\
 &+ \frac{\prod_{l=0}^{n-1} \rho_{l1}(T)}{n!} \sum_{l3=1}^l \prod_{l2=n}^{l3} (PA_{rr}^M)_{l2} P_o(T) \times \\
 &\times (1 + \exp(-\mu_{l3}(T)\tau)) (\exp(-\lambda_{l3}(T) - \mu_{l3}(T))T) \times \\
 &\times F^{(l3)}(CONT),
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 (PB_l^{M,j})_{rr} &= \frac{\prod_{l=0}^{n-1} \rho_{l1}(T)}{n!} \prod_{l2=n}^l (PA_{rr}^M)_{l2} P_o(T) \times \\
 &\times (1 + \exp(-\mu_l(T)\tau)) (\exp(-\lambda_l(T) - \mu_l(T))T) \times \\
 &\times F^{(l)}(CONT).
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

В них  $k$  – номер требования, относительно которого начат расчет;  $j$  – индекс QuS (Qu1, Qu2, Qu3 либо Qu4), в которую осуществляется перестановка;  $l$  – номер Rq в новой QuS после перестановки;  $M$  – индекс, характеризующий марковский тип действующих потоков;  $l3, l1, l2$  – вспомогательные индексы;  $rr$  – обозначение процесса перестановки;  $T$  – время, относительно которого ведется расчет;  $CONT$  – переменная, характеризующая управляющий процесс Control;  $F^{(l)}(CONT)$  – функция распределения переменной  $CONT$ ;  $(PA_{rr}^M)_k$  – вероятность того, что в результате реализации Rq в сопряженном процессе перестановки оно окажется в другой Qu;  $\lambda_l(T)$ ;  $\mu_l(T)$  – интенсивности поступления и обработки требований  $l$  в момент времени  $T$ ;  $\rho_l(T)$  – коэффициент соотношения интенсивности входного и выходного потоков QuS,  $\rho_l(T) = \lambda_l(T) / \mu_l(T)$ ;  $P_o(T)$  – вероятность того, что в момент начала расчета, в Qu отсутствовали Rq. Вывод формул (1) и (2) представлен в [3].

Анализ (1) и (2) показал, что  $F^{(l)}(CONT)$  является статистическим обобщением процесса Control по некоторой выборке вариантов управляющих воздействий в QuS1 или QuS2. Управляющий процесс учитывается как случайный процесс, не зависящий от основного процесса, что не позволяет использовать расчет для определения параметров оптимального управления относительно конкретных состояний управляемой системы [1, 4]. Это является характерной чертой абстрактного математического подхода к расчету в QT, в противо-

вес которому авторами предложен инженерный подход, представленный ниже.

### Инженерный подход к использованию расчета QT для управления в системе QuS с перестановками Rq

1. В разработанном подходе предполагается, что процесс управления Control описанной выше системы является не внешней помехой по отношению к ней, а следствием обстоятельств пребывания Rq в QuS1 и QuS2. На рисунке 2 изображена схема QuS с перестановками, представленная на рис. 1, с точки зрения разработанного подхода. В ней управление осуществляется в виде трех отдельных согласуемых процессов относительно основного процесса перемещения Rq в очередях Qu1 и Qu2:

2. Sv5 и Sv6 выполняют поиск и извлечение требуемых Rq соответственно из Qu1 и Qu2, а затем осуществляют его передачу в Qu3 и Qu4 для иной его реализации в другом типе устройств чем Sv1 и Sv2.

3. Sv7 также ищет и извлекает Rq из Qu1 или Qu2, но размещает его в Qu8.

4. Qu8 осуществляет транспорт Rq к Sv8, который должен обеспечить ряд операций, чтобы разместить Rq доставленное Qu8 в Qu2 или Qu1 для реализации того же типа.

Целью извлечения Rq из Qu1 или Qu2 является предотвращение ошибки его обслуживания в Sv1 или Sv2, когда существует высокая вероятность того, что будет превышено ограничение верхнего предела времени ожидания  $\tau$  реализации Rq в данной QuS. В этом случае вероятные издержки обслуживания Rq в Sv1 или Sv2 будут больше, чем потери, связанные с переносом обслуживания в однотипную QuS или в QuS3 и QuS4 иной реализации Rq. Такие извлечения и перестановки Rq были названы нами инореализацией Rq.

Преимуществом схемы на рис. 2 перед схемой 1 является то, что в представляемой QuS с перестановками выделены дополнительные QuS [5]. В результате, в ней можно определить объекты управления и исполнительные устройства относительно каждого отдельного типа и этапа инореализации. Это позволяет создавать основы расчета посредством синтеза функции управляющего устройства для каждого процесса управления, как это имеет место при моделировании элементов контура ав-

томатического управления в теории автоматического управления [6]. В данном случае – это инореализация Rq.

При анализе было выяснено [5, 6, 8], что моделирование Qu как объектов управления, которые на производстве реализуются в виде разнообразных транспортеров, ленточных, тельферных и иных, невозможно без моделирования в них вакансий Rq. При этом природа возникновения вакансий Rq может быть различной. Одни вакансии должны планироваться и обеспечиваться искусственно для возможности вставки нового Rq в Qu, в которых уже существует своя последовательность собственных Rq. Другие – возникают в момент извлечения Rq из Qu, и могут быть заняты Rq той же Qu или Rq, переставляемыми из других Qu. Вакансии также могут возникать спонтанно в результате неравномерности поступления Rq, в результате инерционности элементов систем и ошибок управления в моделируемых посредством Qu разнообразных транспортных механизмах.

При этом вакансии Rq, оказавшиеся непосредственно рядом с Sv после обслуживания им очередного Rq будут создавать аномальные задержки обслуживания, которые не учитываются в расчете QT, поскольку в его системной модели Qu вакансии Rq отсутствуют. Кроме того, вакансии Rq в Qu изменяют предельное количество Rq, которые могут быть размещены в этой Qu, что тоже не учитывается в традиционном расчете QT из-за того, что системная модель Qu не предусматривает наличие вакансий Rq. Поэтому для расчета была предложена новая системная модель QuS1, отображенная на рис. 2, с вакансиями для Rq как это изображено на рис. 3.

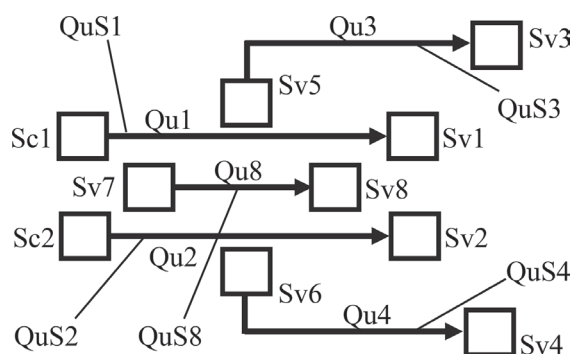


Рис. 2. Схема QuS с перестановками с точки зрения инженерного подхода

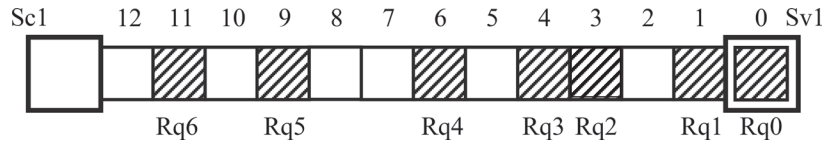


Рис. 3. Системная модель QuS1 с вакансиями для Rq:  $\square$  – вакансия Rq на одном из мест Qu1;  $\blacksquare$  – Rq на одном из мест Qu1

На нем в нижней части рис. 3 представлена нумерация Rq, ожидающих реализации в Sv. Кроме Rq на модели QuS представлены вакансии Rq. Для отображения количества вакансий Rq, находящихся перед рассчитываемым  $k$ -м Rq, где  $k$  – номер Rq в Qu на момент времени  $T$ , введем переменную  $\alpha_k$ . Однако данная переменная не отображает явно топологию вакансий Rq в Qu в момент времени расчета  $T$ , от которой зависит риск аномальной задержки реализации. Явно задавать топологию вакансий Rq на любой момент времени можно, если ввести дополнительный концепт места Qu с номерами  $h$ , которые представлены на рис. 3 непосредственно над Qu. Исходя из этого, будем использовать переменную места Qu  $h_k = k + \alpha_k$ , где  $h_k$  – номер места Qu, занимаемое  $k$ -м Rq. При этом  $m \geq h_k \geq k$ , где  $m$  – верхний предел количества Rq в Qu.

Для моделирования управляющих воздействий на участке Qu, следующем за  $h_k$  местом Qu введем переменную  $\beta_k$  баланса изъятий и вставок Rq в данную Qu, а количество Rq планируемых к реализации в этой же QuS обозначим как  $\gamma_k$ , а с учетом Rq уже реализуемого в Sv – как  $\gamma_{k+0}$ . Соответственно для описания количества вакансий во всей QuS после  $k$ -го Rq, а не только в Qu в момент времени расчета  $T$  будем использовать переменную  $\alpha_{k+0}$ .

Применяя метод дискретных преобразований для решения систем дифференциальных уравнений и следуя рекомендациям Н. Джейсуола [7], по разработанной модели была пересчитана вероятность реализации  $k$ -го Rq в QuS при ограничении верхнего значения остаточного времени реализации  $\Delta\tau_k^\beta$ , которая выражается в следующей формуле:

$$P_k(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) = \frac{(k-1)!}{h!} \exp(\Delta\tau_k^\beta) = a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) \sum_{j=0}^{k-1} C_{nj}^j \times \exp(\Delta\tau_{nj}(\gamma_0 - \alpha_{nj+0} - \beta_{nj})), \quad (3)$$

где  $j$  – индекс, в которую предполагалось попасть в результате перестановки;  $j$  – номер Rq, которым станет оно в новой QuS;  $n_j = h - k + j$ ;  $C_{nj}^j$  – биномиальный коэффициент [3, 7]; физический смысл его означает количество способов, которыми можно попасть на место  $j$  из  $n_j$  возможных;

$\Delta\tau_k^\beta = \tau - t_k$  – остаточное время реализации, в течение которого Rq начиная с момента времени  $t_k$  еще может ожидать реализации в Sv, а по истечении этого времени Rq должен покинуть Qu без реализации;  $\gamma_{k+0} = \gamma_k + \gamma_0$ ; – приведенное количество требований в системе с ожиданием, которые планируются к реализации и обслуживаются в QuS; при этом  $\gamma_0 = 1 - \tau_w^0 / \tau_r$ ;  $\tau_r$  – среднее время обслуживания Rq в Sv;  $\tau_w^0$  – длительность обслуживания на месте 0 в момент времени начала отсчета;  $a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta)$  – коэффициент масштабирования – коэффициент взаимосвязи количественных характеристик очереди с параметрами времени ожидания [3]. Значение  $a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta)$  равно:

$$a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) = \frac{(k-1)!}{h!} \exp(\Delta\tau_k^\beta) \times \left[ \sum_{j=0}^{k-1} C_{nj}^j \exp(\Delta\tau_{nj}(\gamma_0 - \alpha_{nj+0} - \beta_{nj})) \right]^{-1}, \quad (4)$$

при  $k = \overline{1, N}$ .

Был разработан алгоритм управления QuS, особенностью которого являлось то, что расчет по выражениям (3) и (4) осуществлялся последовательно относительно мест QuS в порядке: от Sv к концу Qu с расчетом  $P_k$  для каждого  $k$ -го Rq. Сравнения его с минимально допустимым для реализации значением  $P_\beta$ , определением относительно  $k$ -го Rq управляющего воздействия и итерационным уточнением переменной управления  $\beta_{k+1}$  подтвердили теоретическую возможность управления инореализаций Rq в отдельной QuS.

При изменении производственных условий в формулы (3) и (4) должны быть измене-

ны. Эти изменения должны быть внесены посредством составления новой системы дифференциальных уравнений с последующей проверкой решения на адекватность [1, 8], что доступно лишь узкому специалисту и представляет трудность для автоматизации.

Кроме того, для согласования процессов объекта управления и исполнительного механизма в процессе управления, а также нескольких процессов управления между собой необходима оценка, задающая для исполнительных механизмов ограничения, на которые они бы могли ориентироваться при реализации управляющих воздействий [9, 10]. Здесь это ограничения при изъятии, вставке Rq в Qu, транспортировке Rq, подготовке вакансий или наоборот устранении вакансий Rq в Qu. Между тем оценка вероятности реализации при заданном остаточном времени ожидания  $P_k | \Delta\tau_k^\beta$  для последующего ее сравнения с  $P_\beta$  не имеет мгновенных измеряемых значений. Получение же в явном виде обратной оценки  $\Delta\tau_k | P_\beta$ , представляющей собой остаточное время ожидания  $k$ -м Rq своей реализации в QuS без превышения значения  $P_\beta$

из выражений (3) и (4) для последующего сравнения ее с  $\Delta\tau_k^\beta$  для рассматриваемого модельного примера, невозможно [1, 3, 6]. Использование численных методов для расчета  $\Delta\tau_k | P_\beta$  чревато низкой скоростью сходимости или даже отсутствием результатов вычислений, что не позволяет считать такой метод расчета при управлении Rq в реальном времени универсальным [1, 8].

### Заключение

Таким образом, можно констатировать, что использование расчета QT в целях системного управления предметами обработки в условиях дискретного производства теоретически возможно, однако оно не может быть универсальным и применимым для автоматической адаптации систем управления к изменяющимся производственным условиям. Исходя из этого, применение расчета QT целесообразно ограничить лишь имитационным моделированием типовых производственных ситуаций и типовых ситуаций управления с целью их производственного анализа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Маторин, С. И. Имитационное моделирование с использованием системно-объективного подхода / С. И. Маторин, А. Г. Жихарев, Н. О. Зайцева – Прикладная информатика. Научные статьи. № 6(60): НОЧ «МФПУ «Синергия», 2015. 14 С.
2. Семенова О. В. Многопороговое управление системой массового обслуживания ВМАР/С/1 С МАР-потокм катастрофических сбоев / О. В. Семенова // Автоматика и телемеханика. – М., 2007. С. 24–32.
3. Зирко, О. Ф. Информационная поддержка процессов дискретных производств на основе очередей требований [Депонированная рукопись] / О. Ф. Зирко, В. И. Кудрявцев – ГУ БелИСА – 2016. – № Д201616 – Режим доступа: [www.belisa.org.by](http://www.belisa.org.by), [www.depositary.bas-net.by](http://www.depositary.bas-net.by). – 296 с.
4. Luis Damas and Robin Milner. Principal type-schemes for functional programs. In POPL-82: Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, ACM, 1982 (in English), pp. 207–212.
5. Зирко О. Ф. Управление дискретными производственными и бизнес-процессами: теория и методика / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Новости науки и технологии, 2016. № 3(38). – С. 39–47.
6. Кудрявцев, В. И. Автоматическое управление дистрибуцией в очередях / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Научно-информационное обеспечение развития АПК: матер. IX Междунар. науч.практ. конф. – М.: ФГБНУ «Росинформагротех», 2017. – С. 137–142.
7. Джейсуол, Н. К. Очереди с приоритетами / Н. К. Джейсуол – М.:»Мир», 1973. – 279 с.
8. Зирко, О. Ф. Моделирование производственных процессов в вычислительных структурах и структурах данных / О. Ф. Зирко, В. И. Кудрявцев / Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации (РИНТИ–2017): доклады XVI Междунар. конф., Минск, 16 ноября 2017 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2017. – С. 153–159.
9. Лобатый, А. А. Импульсное управление гибридной электротехнической системой / А. А. Лобатый, Ю. Н. Петренко, А. Эльзеин, А. С. Абуфанас // Системный анализ и прикладная информатика, 2016. № 4(12). – С. 46–51.
10. Hilghsmith, Jim. Agile Software Development Ecosystems / Jim Hilghsmith – Addison-Wesley Professional, 2002 (in English). – 448 С.

### REFERENCES

1. Matorin, S. I. Simulation modeling using system-objective approach / S. I. Matorin, A. G. Zhikharev, N. About. Zaitsev. – Applied Informatics. Scientific article. № 6 (60), 2015. (in Russian) – 14 P.

2. **Semenova, O. V.** Multithreshold control of the queueing system MAR/1 MAR stream of catastrophic failures / O. V. Semenova // Automation and remote control – Moscow, 2007 (in Russian). – Pp. 24–32.
3. **Zirko, O. F.** Information support of discrete manufacturing processes queue-based requirements [of the Deposited manuscript] / O. F. Zirko, V. I. Kudryavtsev – SO BelISA – 2016. – №D201616 – Access Mode: [www.belisa.org.by](http://www.belisa.org.by); [www.depositary.bas-net.by](http://www.depositary.bas-net.by) – 296 p.
4. **Zirko, O. F.** Control of discrete processes in production and business: theory and methodic / V. I. Kudryavtsev, O. F. Zirko // News of science and technology, 2016. № 3(38) (in Russian). – Pp. 39–47.
5. **Kudryavtsev, V. I.** Automatic distribution management in queues / Kudryavtsev V. I., O. F. Zirko // Scientific and information support of agroindustrial complex development [Ter. IX mezhdunar. science. practice. Conf.]: FGNU «Rosinformagrotekh», 2017 (in Russian). – Pp. 437–442.
6. **Jaiswal, N. K.** Priority queues / N. K. Jaiswal. – Moscow: Мир, 1973 (in Russian). – 279 P.
7. **Luis Damas and Robin Milner.** Principal type-schemes for functional programs. In POPL-82: Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, ACM, 2012 (in English), pp. 207–212.
8. **Zirko, O. F.** Simulation of production processes in the computational structures and data structures/ O. F. Zirko, V. I. Kudryavtsev // Development of Informatization and state system of scientific and technical information (DISTI-2017): reports of the XVI Intern. Conf. Minsk, 16 November 2017 – Minsk: UIIP NASB, 2017 (in Russian). – Pp. 153–159.
9. **Lobaty, A. A.** Impulse control of a hybrid electrical system / A. A. Lobaty, Yu. N. Petrenko Yu. N., A. Elzey, A. S. Abufanas // System Analysis and Applied Informatics, 2016. No. 4 (12). – P. 46–51.
10. **Jim Hilghsmith.** Agile Software Development Ecosystems/ Jim Hilghsmith – Addison-Wesley Professional, 2002 (in English). – 448 P.

Поступила  
30.03.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

V. I. KUDRIAVTSEV, O. F. ZIRKO

## THE POSSIBILITY OF APPLYING CALCULATION BASED ON QUEUING THEORY WITH THE AIM OF REAL-TIME CONTROL

*Possibilities of using mathematical models of the theory of queues for the purpose of control of processes of discrete productions modeled by it in real time are investigated. As a model example, a system for managing the rearrangements of service items in queues was considered. For the analysis the methods of calculation of BMAP-controlled systems and the methods of the theory of recovery on periods of employment for queues with vacancies of requirements were used.*

*As a result of research it is found out that mathematical modeling in the theory of queues can be used for simulation of discrete production for the purpose of design and the production analysis, but cannot be used for management of the modeled processes in real time.*

**Keywords:** demand; real-time control; discrete event mathematical modeling; queue; process control system; engineering approach; permutations; jobs; BMAP-system.



**Kudryavtsev V. I.**, doctor of technical science, deputy director of Research and production company «ADECVAT» in Moscow, Russia;  
e-mail: vik171@ya.ru



**Zirko O. F.**, scientific worker of department of scientific and methodological support of examination and registration in «Belarusian Institute of system analysis and information support of scientific and technical sphere», Minsk, Belarus;  
e-mail: olzirko@yandex.by

**ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ**

**INFORMATION SECURITY**

УДК 621.383

А. М. ТИМОФЕЕВ, КАНД. ТЕХН. НАУК, ДОЦЕНТ

## ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ ОДНОФОТОННОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ НА ДОСТОВЕРНОСТЬ ЕЕ ПРИЕМА В КВАНТОВО-КРИПТОГРАФИЧЕСКОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*

*Получено выражение для оценки достоверности информации при ее передаче по квантово-криптографическому каналу связи, содержащему счетчик фотонов с мертвым временем. По результатам математического моделирования установлены зависимости достоверности принятых данных от среднего времени однофотонной передачи информации. Выполненные исследования показали, что с ростом среднего времени однофотонной передачи информации эти зависимости растут, достигая насыщения. Причем прочих равных параметрах с ростом средней длительности мертвого времени продлевающегося типа насыщение происходит при больших значениях среднего времени однофотонной передачи информации.*

**Ключевые слова.** Счетчик фотонов, мертвое время, квантово-криптографический канал связи.

### Введение

При создании современных систем связи стремятся повысить надежность их функционирования [1]. Это особенно важно, когда системы связи предназначены для передачи конфиденциальных данных. Так, например, в системах квантово-криптографической связи достаточно часто в качестве приемных модулей используют счетчики фотонов [2]. Обусловлено это тем, что в таких системах передача информации выполняется маломощными оптическими импульсами со средним числом фотонов не более десяти на каждый передаваемый бит (или символ). Счетчики фотонов характеризуются достаточно высокой чувствительностью [3–5], что позволяет с высокой достоверностью регистрировать предельно слабое оптическое излучение.

Под достоверностью будем понимать вероятность того, что принятые данные соответствуют переданным.

Известные методы оценки достоверности принятых данных [1] не учитывают наличие мертвого времени счетчика фотонов. В течение этого времени счетчик фотонов не чувствителен к падающему на него оптическому излучению [3, 5], что приводит к ошибкам при передаче данных и к потерям передаваемой информации.

Поскольку до настоящего времени оценка влияния мертвого времени счетчика фотонов на достоверность принятых данных квантово-криптографических каналов связи не выполнялась, то это являлось целью данной работы.

Объектом исследования являлся асинхронный квантово-криптографический канал связи, в котором в качестве приемного модуля использовался счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа. Мертвым временем продлевающегося типа характеризуются счетчики фотонов на базе лавинных фотоприемников, включенные по схеме пассивного гашения лавины [2, 3].

Предметом исследования является установление влияния времени однофотонной передачи информации на достоверность ее приема.

### Выражение для оценки достоверности принятых данных

В начале получим выражение для оценки достоверности принятых данных. Дальнейшие рассуждения будут основаны на том, что канал связи построен на базе приема-передающего оборудования [4], в котором данные передаются двоичными символами («0» и «1») в течение длительности времени  $\tau_b$ . Для передачи символов «0» и «1» используются оптические сигналы мощностью  $W_1$  и  $W_2$  соответственно

( $W_1 < W_2$ ), содержащие не более десяти фотонов на каждый бит (символ). Причем трансляция этих сигналов в канал связи осуществляется в течение длительности времени однофотонной передачи  $\Delta t = \tau_b / 2$ . Следовательно, в течение времени  $t_3 = \tau_b / 2$  данные в канал связи не передаются, т. е. между каждой парой символов находится так называемый «защитный» временной интервал. Поскольку символы «0» и «1» передаются импульсами различной мощности, то на выходе счетчика фотонов за время  $\Delta t$  формируется различное количество электрических импульсов, которое будет прямо пропорционально мощности оптического излучения [4]. Всеми потерями информации, за исключением потерь в счетчике фотонов, пренебрегаем.

Исходя из определения, выражения для оценки достоверностей принятых символов «0» и «1» запишутся соответственно как:

$$D_0 = \frac{P(0/0)}{P(0/0) + P(0/1)}$$

и

$$D_1 = \frac{P(1/1)}{P(1/1) + P(1/0)}, \quad (1)$$

где  $P(0/0)$  и  $P(1/1)$  – вероятности регистрации на выходе канала связи символов «0» и символов «1» при наличии на входе канала связи символов «0» и «1» соответственно,  $P(0/1)$  и  $P(1/0)$  – вероятности регистрации на выходе канала связи символов «0» и символов «1» при наличии на входе канала связи символов «1» и «0» соответственно.

Предположим, что на выходе канала зарегистрирована случайная двоичная последовательность, для которой вероятность появления символов «0»  $P'_s(0)$  равна вероятности появления символов «1»  $P'_s(1)$ . Тогда достоверность принятых данных равна:

$$D = 0,5(D_0 + D_1) = 0,5 \left( \frac{P(0/0)}{P(0/0) + P(0/1)} + \frac{P(1/1)}{P(1/1) + P(1/0)} \right). \quad (2)$$

Переходные вероятности  $P(0/0)$ ,  $P(0/1)$ ,  $P(1/1)$  и  $P(1/0)$ , входящие в выражение (2), для рассматриваемого канала связи получены в работе [6] на основании статистических распределений числа импульсов на выходе счетчика фотонов:

$$P(0/0) = \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{[(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]^N \exp[-(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]}{N!}, \quad (3)$$

$$P(0/1) = \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{[(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]^N \exp[-(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]}{N!}, \quad (4)$$

$$P(1/1) = 1 - \sum_{N=0}^{N_2} \frac{[(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]^N \exp[-(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]}{N!}, \quad (5)$$

$$P(1/0) = 1 - \sum_{N=0}^{N_2} \frac{[(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]^N \exp[-(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]}{N!}, \quad (6)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – нижний и верхний пороговые уровни регистрации соответственно,  $n_t$  – средняя скорость счета темновых импульсов на выходе счетчика фотонов,  $n_{s0}$  и  $n_{s1}$  – средние скорости счета сигнальных импульсов на выходе счетчика фотонов при передаче символов «0» и «1» соответственно,  $\tau_d$  – средняя длительность мертвого времени продлевающегося типа.

Нижний и верхний пороговые уровни регистрации – это соответственно наименьшее и наибольшее число зарегистрированных на

выходе счетчика фотонов импульсов, при котором делается вывод, что передан символ «0». При превышении зарегистрированных импульсов числа  $N_2$  делается вывод, что передан символ «1», а при регистрации импульсов в количестве, меньшем, чем  $N_1$ , принимается решение, что символ отсутствует [4, 6].

Отметим, что для оценки мертвого времени продлевающегося типа используют среднее значение, т.к. его длительность зависит от интенсивности оптического излучения [3].

Темновые и сигнальные импульсы – это импульсы, которые появляются на выходе счетчика фотонов соответственно в отсутствии оптического сигнала и в результате воздействия фотонов регистрируемого излучения [2, 3].

Таким образом, рассчитать достоверность принятых данных можно путем подстановки в формулу (2) соответствующих выражений (3)–(6) при заданных пороговых уровнях регистрации  $N_1$  и  $N_2$ , средних скоростях счета импульсов  $n_t$ ,  $n_{s0}$  и  $n_{s1}$  и длительностях времени  $\tau_d$ ,  $\Delta t$  и  $\tau_b$ .

### Результаты математического моделирования и их обсуждение

Вычисление достоверности принятых данных выполнялось для каналов связи, содержащих в качестве приемного модуля счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа при различных значениях  $\tau_d$ ,  $n_{s0}$ ,  $n_{s1}$  и  $\Delta t$ .

На рис. 1 представлены зависимости достоверности принятых данных от среднего времени однофотонной передачи информации для различной средней длительности мертвого времени продлевающегося типа.

При построении зависимостей  $D(\Delta t)$  средние скорости счета сигнальных импульсов  $n_{s0}$  и  $n_{s1}$  и диапазоны значений  $\Delta t$  выбирались по методике, описанной в работе [6], с учетом того, что  $\tau_d$  не может превышать  $\Delta t$ , которое, в свою очередь, должно быть меньше средней длительности передачи одного бита (символа)  $\tau_b$  на величину защитного временного интервала. В противном случае использование счетчиков фотонов для регистрации данных становится невозможным [4, 6].

Расчет зависимостей, показанных на рис. 1, проводился для одинаковых значений нижнего и верхнего пороговых уровней регистрации  $N_1 = 1$  и  $N_2 = 7$ , средней скорости счета темновых импульсов  $n_t = 10^3 \text{ с}^{-1}$  и средней длительности передачи одного бита (символа)  $\tau_b = 100 \text{ мкс}$ . Необходимо отметить, что пороговые уровни регистрации можно выбирать и другими, отличными от 1 и 7, но при сравнении зависимостей  $D(\Delta t)$  для различных средних длительностей мертвого времени пороговые уровни регистрации  $N_1$  и  $N_2$  следует фиксировать постоянными, как и среднее значение скорости счета темновых импульсов  $n_t$  и среднее время передачи одного бита (символа)  $\tau_b$ .

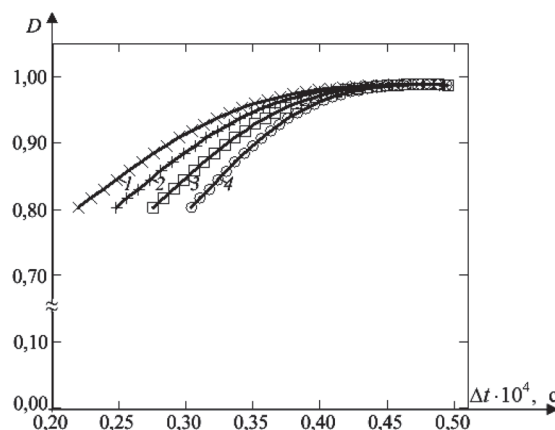


Рис. 1. Зависимость достоверности принятых данных от времени однофотонной передачи:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 7$ ,  $n_t = 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_b = 100 \text{ мкс}$ ; средняя длительность мертвого времени: 1 –  $\tau_d = 0$ ; 2 –  $\tau_d = 5 \text{ мкс}$ ; 3 –  $\tau_d = 10 \text{ мкс}$ ; 4 –  $\tau_d = 15 \text{ мкс}$

Отметим, что при других значениях  $N_1$  и  $N_2$ , отношениях  $\tau_d/\Delta t$ ,  $n_t/n_{s0}$  и  $n_t/n_{s1}$  и выполнении указанных выше ограничений проявление эффекта мертвого времени продлевающегося типа для рассматриваемого канала связи аналогично представленному на рис. 1.

Из полученных результатов видно, что с увеличением среднего времени однофотонной передачи информации  $\Delta t$  зависимости  $D(\Delta t)$  растут, достигая насыщения, что имеет место для всех исследуемых значений  $\tau_d$  (см. рис. 1). При прочих равных параметрах с ростом средней длительности мертвого времени продлевающегося типа  $\tau_d$  это насыщение происходит при больших значениях  $\Delta t$ : при  $\Delta t \geq 44,6 \text{ мкс}$  для  $\tau_d = 0$ ; при  $\Delta t \geq 45,1 \text{ мкс}$  для  $\tau_d = 5 \text{ мкс}$ ; при  $\Delta t \geq 45,8 \text{ мкс}$  для  $\tau_d = 10 \text{ мкс}$ ; при  $\Delta t \geq 46,3 \text{ мкс}$  для  $\tau_d = 15 \text{ мкс}$ . При этом увеличение  $\tau_d$  при прочих равных параметрах приводит к уменьшению достоверности принятых данных. Так, например, при  $\Delta t = 42 \text{ мкс}$  достоверность принятых данных равна  $98,46 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 0$ ;  $98,30 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 5 \text{ мкс}$ ;  $98,02 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 10 \text{ мкс}$ ;  $97,59 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 15 \text{ мкс}$ . Указанные особенности поведения зависимостей  $D(\Delta t)$  объясняются характером изменения переходных вероятностей  $P(0/0)$ ,  $P(0/1)$ ,  $P(1/1)$  и  $P(1/0)$  с увеличением среднего времени однофотонной передачи информации  $\Delta t$ , что иллюстрируется рис. 2.

С увеличением среднего времени однофотонной передачи информации  $\Delta t$  переходные вероятности  $P(0/0)$ ,  $P(1/0)$  и  $P(1/1)$  растут, а переходная вероятность  $P(0/1)$  уменьшается. Это наблюдается как при наличии мертвого

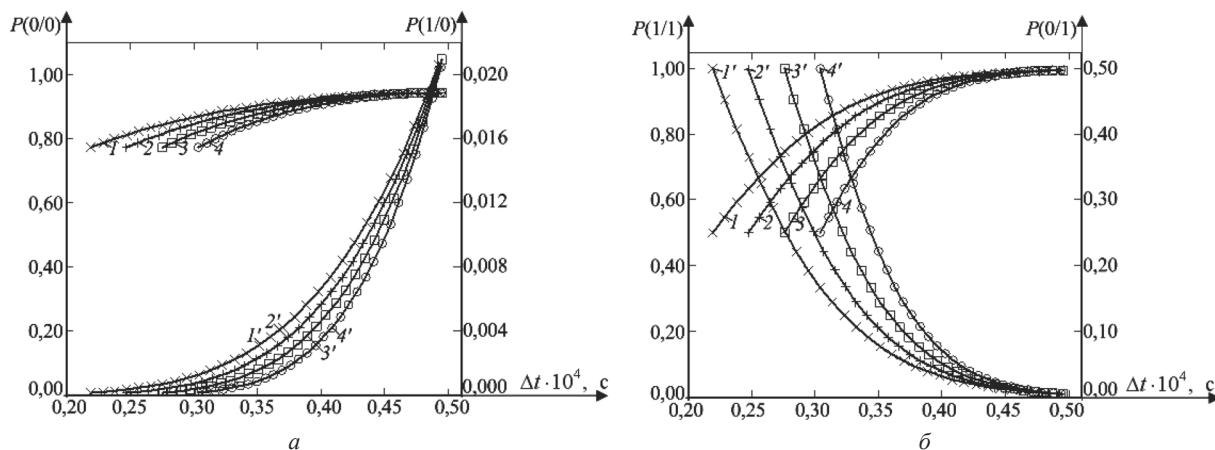


Рис. 2. Зависимости переходных вероятностей  $P(0/0)$ ,  $a$ ,  $1-4$ ,  $P(1/0)$ ,  $a$ ,  $1'-4'$ ,  $P(1/1)$ ,  $b$ ,  $1-4$ ,  $P(0/1)$ ,  $b$ ,  $1'-4'$ , от времени однофотонной передачи:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 7$ ,  $n_t = 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_b = 100 \text{ мкс}$ ; средняя длительность мертвого времени:  $1$  и  $1' - \tau_d = 0$ ;  $2$  и  $2' - \tau_d = 5 \text{ мкс}$ ;  $3$  и  $3' - \tau_d = 10 \text{ мкс}$ ;  $4$  и  $4' - \tau_d = 15 \text{ мкс}$

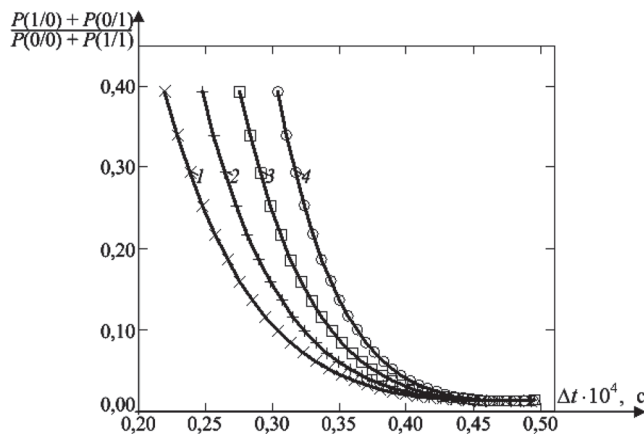


Рис. 3. Зависимость отношения  $[P(1/0) + P(0/1)] / [P(0/0) + P(1/1)]$  от времени однофотонной передачи:  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 7$ ,  $n_t = 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_b = 100 \text{ мкс}$ ; средняя длительность мертвого времени:  $1 - \tau_d = 0$ ;  $2 - \tau_d = 5 \text{ мкс}$ ;  $3 - \tau_d = 10 \text{ мкс}$ ;  $4 - \tau_d = 15 \text{ мкс}$

времени продлевающегося типа (см. рис. 2, кривые  $2-4$  и  $2'-4'$ ), так и при его отсутствии (см. рис. 2, кривые  $1$  и  $1'$ ) и объясняется смещением статистических распределений смеси числа темновых и сигнальных импульсов  $P_{st0}(N)$  и  $P_{st1}(N)$  при передаче символов «0» и «1» соответственно с изменением  $\Delta t$  и  $\tau_d$ , что достаточно подробно поясняется в работе [6]. Следует также отметить, что при прочих равных параметрах приема информации в результате такого смещения с ростом  $\tau_d$  переходные вероятности  $P(0/0)$ ,  $P(1/0)$  и  $P(1/1)$  уменьшаются, а переходная вероятность  $P(0/1)$  – растет. Так, например, при  $\Delta t = 45 \text{ мкс}$  переходные вероятности  $P(0/0)$ ,  $P(1/0)$ ,  $P(1/1)$  и  $P(0/1)$  равны соответственно  $93,94 \cdot 10^{-2}$ ,  $1,28 \cdot 10^{-2}$ ,  $98,87 \cdot 10^{-2}$  и  $1,13 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 0$ ;  $93,84 \cdot 10^{-2}$ ,  $1,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $98,73 \cdot 10^{-2}$  и  $1,27 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 5 \text{ мкс}$ ;  $93,70 \cdot 10^{-2}$ ,  $1,10 \cdot 10^{-2}$ ,  $98,51 \cdot 10^{-2}$  и  $1,49 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 10 \text{ мкс}$ ;  $93,50 \cdot 10^{-2}$ ,  $0,99 \cdot 10^{-2}$ ,  $98,23 \cdot 10^{-2}$  и  $1,77 \cdot 10^{-2}$  для

$\tau_d = 15 \text{ мкс}$  (см. рис. 2). Отметим также, что для всех исследуемых диапазонов  $\Delta t$  наибольшее значение  $P(1/0)$  не превышает наименьшей величины  $P(0/0)$ .

Указанные особенности изменения переходных вероятностей  $P(0/0)$ ,  $P(1/0)$ ,  $P(1/1)$  и  $P(0/1)$  с ростом  $\Delta t$ , в свою очередь, приводят к росту зависимостей  $D(\Delta t)$  вплоть до их насыщения за счет того, что отношение  $[P(1/0) + P(0/1)] / [P(0/0) + P(1/1)]$  с ростом  $\Delta t$  уменьшается, тоже переходя в насыщение, как показано на рис. 3.

Также из рис. 3 видно, что при прочих равных параметрах увеличение  $\tau_d$  приводит к росту отношения  $[P(1/0) + P(0/1)] / [P(0/0) + P(1/1)]$ . Так, например, при  $\Delta t = 34 \text{ мкс}$  это отношение равно  $5,26 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 0$ ;  $7,16 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 5 \text{ мкс}$ ;  $10,58 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 10 \text{ мкс}$ ;  $16,99 \cdot 10^{-2}$  для  $\tau_d = 15 \text{ мкс}$ . Следовательно, при прочих равных параметрах с ростом  $\tau_d$  до-

стоверность принятых данных уменьшается (см. рис. 1).

### Заключение

Получено выражение для расчета достоверности данных, принятых по асинхронному квантово-криптографическому каналу связи, в котором в качестве приемного модуля используется счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа.

Установлены зависимости достоверности принятых данных  $D$  от среднего времени одно-

фотонной передачи информации  $\Delta t$  с учетом средней длительности мертвого времени продлевающегося типа  $\tau_d$ . Выполненные исследования показали, что с ростом среднего времени однофотонной передачи информации зависимости  $D(\Delta t)$  растут, достигая насыщения. Причем прочих равных параметрах с ростом средней длительности мертвого времени продлевающегося типа  $\tau_d$  это насыщение происходит при больших значениях  $\Delta t$ : при  $\Delta t \geq 44,6$  мкс для  $\tau_d = 0$ ; при  $\Delta t \geq 45,1$  мкс для  $\tau_d = 5$  мкс; при  $\Delta t \geq 45,8$  мкс для  $\tau_d = 10$  мкс; при  $\Delta t \geq 46,3$  мкс для  $\tau_d = 15$  мкс.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Дмитриев, С. А.** Волоконно-оптическая техника: современное состояние и перспективы / С. А. Дмитриев, Н. Н. Слепов. – М.: ООО ВОТ, 2005. – 576 с.
2. **Кишин, С. Я.** Квантовая криптография: идеи и практика / С. Я. Кишин; под ред. С. Я. Кишин, Д. Б. Хорошко, А. П. Низовцев. – Минск: Белорус. наука, 2007. – 391 с.
3. **Гулаков, И. Р.** Фотоприемники квантовых систем: монография / И. Р. Гулаков, А. О. Зеневич. – Минск: УО ВГКС, 2012. – 276 с.
4. **Тимофеев, А. М.** Устройство для передачи и приема двоичных данных по волоконно-оптическому каналу связи / А. М. Тимофеев // Приборы и методы измерений. – 2018. – т. 9. – № 1. – С. 17–27.
5. **Reduced** deadtime and higher rate photon-counting detection using a multiplexed detector array / S. A. Castelletto [et al.] // Journal of Modern Optics – 2007. – Vol. 54. – P. 337–352
6. **Тимофеев, А. М.** Энтропия потерь однофотонного асинхронного волоконно-оптического канала связи с приемником на основе счетчика фотонов с продлевающимся мертвым временем / А. М. Тимофеев // Актуальные проблемы науки XXI века. – 2018. – вып. 7. – С. 5–10.

### REFERENCES

1. **Dmitriev S. A.** [Fiber-optic technology: current status and prospects]. Volokonno-opticheskaya tehnika: sovremennoe sostoyanie i perspektivy. – Moscow: LLC FOT, 2005, 576 p. (in Russian).
2. **Kilin S. Ya.** [Quantum cryptography: ideas and practices]. Kvantovaya kriptografiya: idei i praktika. – Minsk: Belarus. Sci, 2007, 391 p. (in Russian).
3. **Gulakov I. R., Zenevich A. O.** [Photodetectors of quantum systems: monograph]. Fotopriemniki kvantovyih sistem: monografiya. – Minsk: EI HSCC, 2012, 276 p. (in Russian).
4. **Timofeev A. M.** [Device for binary data transmitting and receiving over a fiber-optic communication channel]. Pribory i metody izmereniy [Devices and methods of measurements], 2018. – Vol. 9. – № 1, pp. 17–27 (in Russian).
5. **Castelletto S. A., Degiovanni I. P., Schettini V., Migdall A. L.** Reduced deadtime and higher rate photon-counting detection using a multiplexed detector array. Journal of Modern Optics, 2007, vol. 54, pp. 337–352.
6. **Timofeev A. M.** [Entropy of losses of a single-photon asynchronous fiber-optic communication channel with a receiver based on a photon counter with prolonged dead time]. Aktualnyie problemy nauki XXI veka [Current issues of science in the 21st century], 2018, – Vol. 7, pp. 5–10 (in Russian).

Поступила  
23.01.2019

После доработки  
20.03.2019

Принята к печати  
25.03.2019

TIMOFEEV A. M.

## THE INFLUENCE OF THE TIME OF SINGLE PHOTON TRANSMISSION OF INFORMATION ON THE RELIABILITY OF ITS RECEPTION IN A QUANTUM CRYPTOGRAPHIC COMMUNICATION CHANNEL

*Expression for estimating the reliability of information during its transmission through quantum-cryptographic communication channel that contains a dead time photon counter has been obtained in this research. According to the results of mathematical modeling, the dependence of the reliability of the received data on the average time of single photon transmission of information was established. Studies have shown that with an increase in the average time of single photon transmission of information, these dependences grow, reaching saturation. Moreover, with equal parameters with an increase in the average duration of the dead time of a prolonging type, saturation occurs at large values of the average time of a single photon transmission of information.*

**Keywords.** Photon counter, dead time, quantum cryptographic communication channel.



**Тимофеев Александр Михайлович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры защиты информации Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Республика Беларусь.

E-mail [tamvks@mail.ru](mailto:tamvks@mail.ru)