

ОБОБЩЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ШЕННОНА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

докт. техн. наук, проф. А.А. ПРИХОЖИЙ

Белорусский национальный технический университет

Аннотация. Известное разложение Шеннона не применимо к не полностью определенным булевым функциям. Предлагается теория, связывающая булеву и частичную алгебры, позволяющая построить новые представления и разложения частично определенных функций. Замечательным свойством разложений является сокращение степени определенности продуктов разложения, что служит источником расширения возможностей при решении задач синтеза, распараллеливания и оптимизации полностью и частично определенных логических программно-аппаратных систем. Результатом предложенной теории является новый тип двоичных диаграмм решений. На примере распараллеливания сумматоров показано значительное увеличение быстродействия системы при незначительном увеличении ее сложности.

Ключевые слова: не полностью определенная функция, частичная логика, разложение, диаграмма решений, оптимизация.

GENERALIZATION OF THE SHANNON EXPANSION FOR INCOMPLETELY SPECIFIED FUNCTIONS: THEORY AND APPLICATION

Abstract. The well known Shannon expansion is not applicable to incompletely specified functions. We propose a theory that merges Boolean and partial algebras and provides creation of new representations and expansions of partially specified functions. A powerful property of the expansions is the reduction of definiteness level of expansion products. This is a source of enlargement of possibilities for synthesis, parallelization and optimization of completely and incompletely specified logical software/hardware systems. A result of proposed theory is a new type of decision diagram. It is shown on the parallelization of adders that the throughput of the system grows rapidly while the system complexity grows slowly.

Key words: incompletely specified function, partial logic, expansion, decision diagram, optimization.

Цифровые или дискретные системы, описанные программно или аппаратно, имеют поведение, определенное полностью для всех входных наборов и последовательностей или определенное частично лишь на некотором подмножестве наборов и последовательностей. Неполная определенность системы расширяет возможности и повышает эффективность проектирования, тестирования, верификации и оптимизации по различным параметрам.

Полностью определенные системы моделируются посредством полностью опреде-

ленных логических (в частности, булевых) функций. Булева функция $f(\mathbf{x})$ от векторного аргумента $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$, есть отображение $f: B^n \rightarrow B$, где множество $B=\{0, 1\}$. Эффективность использования булевых функций для моделирования и оптимизации систем зависит от форм их представления. Наиболее эффективные формы строятся посредством разложения Шеннона функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_i :

$$f(\mathbf{x}) = x_i \wedge f_{x_i=1} \vee \neg x_i \wedge f_{x_i=0}, \quad (1)$$

где \neg, \wedge, \vee – булевы операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции соответственно; $f_{x_i=1}$ и $f_{x_i=0}$ – положительный и отрицательный кофакторы (остаточные подфункции) функции $f(x)$ по аргументу x_i .

Частично определенные системы моделируются посредством частично определенных логических функций. Частично определенная булева функция $\varphi(x)$ от векторного аргумента $x=(x_1, \dots, x_n)$, есть отображение $\varphi: B^n \rightarrow M$, где множество $M=\{0, 1, dc\}$. Элемент dc называется не определенным или безразличным (don't care) значением. Он может быть заменен произвольным образом на 0 или 1 на наборах значений аргументов из множества φ^{dc} , называемого множеством конституент dc . В результате функция φ доопределяется до булевой функции f . Всего существует $2^{|\varphi^{dc}|}$ доопределений, составляющих допустимое множество (пространство поиска) при решении задач оптимизации.

Разложение Шеннона (1) не может быть применено к частично определенной функции $\varphi(x)$ и не может быть использовано для построения представлений функций этого класса. Целью данного исследования является разработка разложений частичных и частично определенных функций, которые могут быть эффективно использованы для моделирования, синтеза и оптимизации не полностью специфицированных логических систем.

В частичной логике множество M используется для построения частичных функций. Частичная функция или функция Клини $\Phi(y)$ от векторного аргумента $y=(y_1, \dots, y_n)$ есть отображение $\Phi: M^n \rightarrow M$. Здесь аргументы и функция принимают три значения 0, 1, dc ,

что позволяет строить суперпозиции частичных функций. В частичной логике существует $3^3=27$ одноместных частичных операций, пять операций определены в табл.1. Всего существует $3^9=19683$ двухместных частичных операций, три операции определены в табл.2. В частичной логике в основе получения различных представлений одной и той же частичной функции лежит использование законов. Относительно частичных операций конъюнкции $\&$ и дизъюнкции $+$ в полной мере действуют законы ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, идентичности, аннигилятора, идемпотентности, поглощения, двойного отрицания, де Моргана. Законы исключенного третьего, склеивания конъюнкций, поглощения литерала и некоторые другие действуют в ограниченной форме.

Формой «значение/область определенности» (Value-Care Representation – VCR) назовем следующее кодирование частичной переменной y_i парой булевых переменных v_i и d_i :

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i=0 \text{ и } d_i=1, \\ 1, & \text{если } v_i=1 \text{ и } d_i=1, \\ dc, & \text{если } v_i \in \{0, 1\} \text{ и } d_i=0. \end{cases} \quad (2)$$

Таблица 1

Базовые одноместные частичные операции

№	Значения частичной переменной y			Обозначение операции	Имя операции
	0	1	dc		
1	0	0	0	0	Константа 0
2	0	1	dc	y	Идентичность
3	1	0	dc	$\sim y$	Инверсия
4	1	1	1	1	Константа 1
5	dc	dc	dc	dc	Константа dc

Таблица 2

Базовые двухместные частичные операции

№	Значения частичных переменных y_1 и y_2									Обозначение операции	Имя операции
	0	0	0	1	1	1	dc	dc	dc		
	0	1	dc	0	1	dc	0	1	dc		
1	0	0	0	0	1	dc	0	dc	dc	$y_1 \& y_2$	Конъюнкция
2	0	1	dc	1	1	1	dc	1	dc	$y_1 + y_2$	Дизъюнкция
3	0	1	dc	1	0	dc	dc	dc	dc	$y_1 \odot y_2$	Исключающее или

Булева переменная v_i называется переменной значения, булева переменная d_i называется переменной области определенности. При $d_i=1$ частичная переменная y_i принимает такое же значение 0 или 1 как и булева переменная v_i . При $d_i=0$ переменная y_i принимает неопределенное значение dc независимо от значения переменной v_i . Таким образом, частичной переменной y_i ставится в соответствие частично определенная функция, записываемая в дальнейшем посредством вертикальной черты в форме $y_i=(v_i|d_i)$. Для функции $(v_i|d_i)$ имеют место следующие частные случаи: $(v_i|0)=(0|0)=(1|0)$ – константа dc независимо от значения v_i ; $(v_i|1)$ – полностью определенная переменная v_i ; $(0|1)$ – константа 0; $(1|1)$ – константа 1.

Форма VCR является связующим звеном между булевой логикой и частичной логикой. Результатом слияния является смешанная логика. Множество законов, выполняющихся в смешанной логике, расширено по сравнению с исходными логиками. Важнейшими являются законы, выражающие частичные операции через булевы операции и VCR форму:

$$\sim(v_i|d_i) = (\sim v_i|d_i), \quad (3)$$

$$(v_1|d_1)\&(v_2|d_2) = (v_1\wedge v_2|d_1\wedge d_2\vee\sim v_1\wedge d_1\vee\sim v_2\wedge d_2), \quad (4)$$

$$(v_1|d_1)+(v_2|d_2) = (v_1\vee v_2|d_1\wedge d_2\vee v_1\wedge d_1\vee v_2\wedge d_2), \quad (5)$$

$$(v_1|d_1)\odot(v_2|d_2) = (v_1\oplus v_2|d_1\wedge d_2), \quad (6)$$

где \oplus – булева операция исключающее или. Так, закон (4) доказывается табл.3. Строки таблицы соответствуют различным комбинациям значений булевых переменных v_1, d_1, v_2, d_2 . Столбец $\&$ содержит результаты выполнения частичной операции конъюнкции, вычисляемые по выражению (2) и строке 1 табл.2. Пара булевых функций $(v|d)$ кодирует результат операции $\&$. На значении dc операции $\&$ функция v может принимать любое из значений 0,1, а функция d принимает значение 0.

На значениях 0, 1 операции $\&$ функция d принимает значение 1. Булевы

Таблица 3

Доказательство закона (4)

v_1	d_1	v_2	d_2	$\&$	v	d	g	h
0	0	0	0	dc	0,1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	dc	0,1	0	0	0
0	0	1	1	dc	0,1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	dc	0,1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	dc	0,1	0	1	0
1	0	1	1	dc	0,1	0	1	0
1	1	0	0	dc	0,0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	dc	0,1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

функции $g=v_1\wedge v_2$ и $h=d_1\wedge d_2\vee\sim v_1\wedge d_1\vee\sim v_2\wedge d_2$ представляют правую часть закона (4). Легко видеть, что функция g принимает значения, полностью согласующиеся со значениями функции v . Значения функции h полностью совпадают со значениями функции d . Таким образом, левая и правая части закона (4) описывают одну частично определенную функцию, что и доказывает закон. Аналогично доказываются законы (3), (5), (6).

Рассмотрев основные положения смешанной алгебры и некоторые ее законы, перейдем к исследованию разложений частично определенных функций. Начнем с полностью определенной функции $(f|1)$, описываемой, по существу, булевой функцией f . Пусть c – некоторая характеристическая булева функция, определенная на том же множестве булевых переменных, что и f . Тогда для любых f и c выполняется следующее разложение функции $(f|1)$:

$$(f|1) = (c|1)\&(f|c)+\sim(c|1)\&(f|\sim c). \quad (7)$$

Докажем его, выполнив следующие преобразования правой части с использованием законов (3)-(5):

$$\begin{aligned} & (c|1)\&(f|c)+\sim(c|1)\&(f|\neg c) = \\ & = (c\wedge f|1\wedge c\vee\neg c\wedge 1\vee\neg f\wedge c)+(\neg c\wedge f|1\wedge\neg c\vee c\wedge 1\vee\neg f\wedge\neg c) = \\ & = (c\wedge f|1)+(\neg c\wedge f|1) = (c\wedge f\vee\neg c\wedge f|1) = (f|1). \end{aligned}$$

Замечательным свойством разложения (7) является сокращенная степень определенности операндов $(f|c)$ и $(f|\neg c)$ по сравнению с исходной функцией $(f|1)$. Сокращение области определенности является источником решения разнообразных задач оптимизации. В частном случае при $c=x_i$ разложение (7) становится известным разложением Шеннона (1), так как для операндов выполняются соотношения $(f|c)=(f_{x_i=1}|x_i)$ и $(f|\neg c)=(f_{x_i=0}|\neg x_i)$. В другом важнейшем частном случае при $c=x_i\oplus x_j$ разложение (7) приобретает вид

$$\begin{aligned} (f|1) = & (x_i\oplus x_j|1)\&(f_{x_i=\neg x_j}^{|x_i\oplus x_j})+ \\ & +\sim(x_i\oplus x_j|1)\&(f_{x_i=x_j}^{|(x_i\oplus x_j)}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f_{x_i=\neg x_j}^{|}$ и $f_{x_i=x_j}^{|}$ есть остаточные функции, которые мы называем исключаящим отрицательным и исключаящим положительным кофактором функции f по переменным x_i и x_j . Кофактор $f_{x_i=\neg x_j}^{|}$ получается путем замены переменной x_i на инверсию переменной x_j в функции f , а кофактор $f_{x_i=x_j}^{|}$ получается в результате замены переменной x_i на переменную x_j . Автору не известно использование этих кофакторов в известных разложениях.

В общем случае успех применения разложения (7) зависит от выбора характеристической функции c . Накладными расходами в разложении являются операция инверсии \sim , две операции конъюнкции $\&$, операция дизъюнкции $+$, а также сама функция c . В связи с этим функция c не должна быть сложной в представлении и реализации.

Разложение (7) обобщается для частично определенной функции $(f|d)$ следующим образом:

$$(f|d) = (c|1)\&(f|d\wedge c)+\sim(c|1)\&(f|d\wedge\neg c), \quad (9)$$

Доказательство его выполняется аналогичным образом. В разложении степень определенности основных операндов снижена дважды: за счет функции c и за счет функции d . В разложениях (7), (9) функция c является полностью определенной. Следующее разложение снижает степень определенности и этой функции:

$$(f|d) = (c|d)\&(f|d\wedge c)+\sim(c|d)\&(f|d\wedge\neg c), \quad (10)$$

Первым применением разложений (7)-(10) является непосредственное моделирование и сокращение областей определенности логических проектов. Предложенные смешанная алгебра и разложения частично определенных функций являются эффективным инструментом для манипулирования неопределенностью. Другим применением алгебры и разложений является синтез и оптимизация полностью определенных логических систем путем их разложения на не полностью определенные части.

В частично определенной функции $\varphi(x)=(v(x)|d(x))$ булева функция $v(x)$ может быть заменена булевой функцией $u(x)$ такой, что $(u|d)=(v|d)$ или $u\wedge d=v\wedge d$. Если u^{on} - множество конститuent 1, то диапазон допустимых функций u описывается соотношением:

$$(v\wedge d)^{on} \subseteq u^{on} \subseteq (v\vee\neg d)^{on}. \quad (11)$$

Реальные границы диапазона (11) зависят от вида функций v и d . Введем операцию минимизации $\min(v|d)$ функции значения v по функции области определенности d , возвращающую ту функцию u из диапазона $v\wedge d \leq u \leq v\vee\neg d$, для которой $\chi(u)=\min$, где $\chi(u)$ есть функция стоимости, определяемая в зависимости от оптимизируемого физического параметра. Не смотря на то, что операция минимизации требует конкретизации, она обладает также и важнейшими общими свойствами, которые мы изучим и свяжем с разложениями функций. Пусть f – заданная булева функция, и c – произвольно выбираемая характеристическая

функция. Использование операции минимизации позволяет корректно преобразовать частичное разложение (7), построенное на частичных операциях, в разложение, построенное на аналогичных булевых операциях:

$$f = c \wedge \min(f|c) \vee \neg c \wedge \min(f|\neg c). \quad (12)$$

Точно также, разложения (9), (10) корректно трансформируются в разложения

$$\min(f|d) = c \wedge \min(f|d \wedge c) \vee \neg c \wedge \min(f|d \wedge \neg c), \quad (13)$$

$$\min(f|d) = \min(c|d) \wedge \min(f|d \wedge \min(c|d)) \vee \neg \min(c|d) \wedge \min(f|d \wedge \neg \min(c|d)). \quad (14)$$

Разложение (12) использует при поиске оптимального представления функции f возможность выбора наиболее подходящих функций $u = \min(f|c)$ и $w = \min(f|\neg c)$ из диапазонов $f \wedge c \leq u \leq f \vee \neg c$ и $f \wedge \neg c \leq w \leq f \vee c$. Размер диапазонов быстро возрастает с ростом числа n аргументов. В разложениях (13), (14) минимизация функции f по функции d сводится к минимизации менее определенных булевых функций, что расширяет пространство поиска и увеличивает возможности нахождения меньшего значения функции стоимости.

Пример 1. Исходная булева функция f представлена картой Карно на рис.1. Представление функции в минимальной дизъюнктивной нормальной форме МДНФ:

$$f = \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \vee x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4.$$

Функция стоимости $\chi(\text{МДНФ}(f))=19$ в числе операций конъюнкция и дизъюнкция. Применим к f разложение (12), выбрав $c = x_2 \oplus x_4$. Функция c представлена картой Карно на рис.1. Продукты разложения показаны на рис.2. Минимизируем функции $\min(f|c) = x_1 \wedge x_3$ и $\min(f|\neg c) = \neg x_1 \vee \neg x_3$.

Собирая воедино продукты разложения, получаем систему из двух функций:

$$c = x_2 \oplus x_4,$$

$$f = c \wedge (x_1 \wedge x_3) \vee \neg c \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3),$$

для которых функция стоимости $\chi(f)=1+1+3+1=6$ в числе операций \vee, \wedge, \oplus и $\chi(f)=8$ в числе операций \vee, \wedge , поскольку $\chi(\oplus)=3$ в числе операций \vee и \wedge . Таким образом, полученное представление функции f компактнее, по крайней мере, на 11 операций по сравнению с МДНФ. Пример показывает, насколько важным является выбор функции c .

Разложения (7)-(14) являются базисом для построения нового типа диаграмм решения, а именно, двоичных if-диаграмм решений или ДИФДР. Базовый фрагмент диаграммы изображен на рис.3. ДИФДР есть связанный, ориентированный, однокорневой ациклический граф, нетерминальные вершины которого метятся меткой *ifd* и имеют три исходящие дуги, а терминальные вершины метятся переменными x_i , инверсиями переменных $\neg x_i$, значениями 0 и 1. Семантика каждой нетерминальной вершины определяется разложением (12). Каждой вершине ДИФДР и диаграмме в целом соответствует некоторая булева функция.

Пример 2. На рис.4 изображена ДИФДР, представляющая булеву функцию f из примера 1. Размер и глубина ДИФДР меньше размера и глубины известной в литературе сокращенной упорядоченной двоичной диаграммы решений.

Диаграммы ДИФДР являются эффективным средством моделирования, распараллеливания, синтеза и оптимизации цифровых систем. В табл.4 даны параметры параллельных сумматоров, синтезированные и оптимизированные

Таблица 4

Параметры сумматоров

№	Биты	Последовательные сумматоры		Параллельные сумматоры	
		Глубина	Сложность	Глубина	Сложность
1	1	2	2	2	2
2	3	4	6	3	8
3	7	8	14	4	24
4	15	16	30	5	64
5	31	32	62	6	160
6	63	64	126	7	384
7	127	128	254	8	896
8	255	156	510	9	2048
9	511	512	1022	10	4608

ванные по временным задержкам распространения сигналов с помощью ДИФДР. С увеличением разрядности слагаемых до 511 глубина и быстродействие параллельного сумматора сократились в 51.2 раза, в то же время сложность увеличилась только в 4.5 раза по сравнению с последовательным сумматором.

Заключение. Предложенные в статье разложения частично определенных булевых функций являются эффективным инструментом для манипулирования неопределенностью в логических проектах в процессе их моделирования, синтеза, верификации, распараллеливания, оптимизации. Применение разложений позволяет улучшить параметры логической системы. Работа поддерживалась грантом академического фонда DAAD, Германия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Prihozhy, A.A.** Methods of Partial Logic and If-Decision Diagrams for Synthesis and Formal Verification of Digital Circuits / A.A. Prihozhy, B. Becker // DAAD Research Report. – Freiburg University, Germany, 2000. – 30 P.
2. **Prihozhy, A.A.** If-Diagrams: Theory and Application / A.A. Prihozhy // Proc. of the European Conference PATMOS'97. – UCL, Belgium, 1997. – P. 369 – 378.
3. **Prihozhy, A.A.** Parallel Computing with If-Decision-Diagrams / A.A. Prihozhy, P.U. Brancevich // Proc. of the Int. Conference PARELEC'98. – Poland, Technical University of Bialystok, 1998. – P. 179 – 184.
4. **Prihozhy, A.A.** If-Decision Diagram Based Modeling and Synthesis of Incompletely Specified Digital Systems / A.A. Prihozhy, B. Becker // Electronics and communications, Special Issue on Electronics Design. – Kyiv, 2005. – P. 103 – 108.
5. **Прихожий, А.А.** Преобразование if-диаграмм решений в пространстве параметров время-сложность / А.А. Прихожий // Автоматизация проектирования дискретных систем, Материалы Седьмой межд. конф. CAD'10. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2010. - С. 15-22.

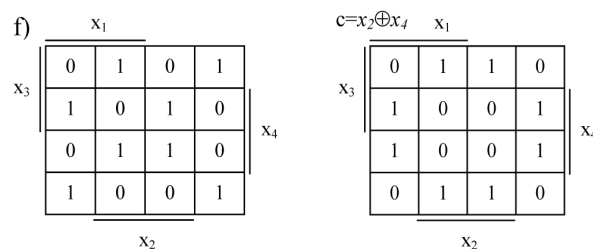


Рис. 1. Заданная функция f и характеристическая функция $c=x_2 \oplus x_4$, зависящие от булевых переменных x_1, x_2, x_3, x_4

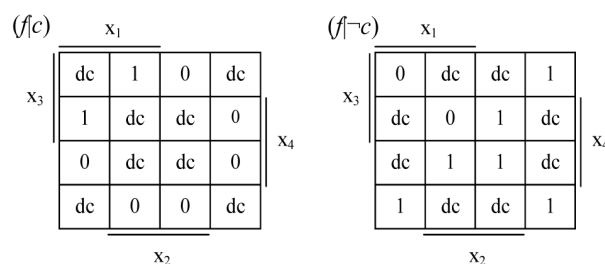


Рис. 2. Частично определенные функции (f(c) и (f|¬c): x_1, x_2, x_3, x_4 – булевы переменные; dc – безразличное значение

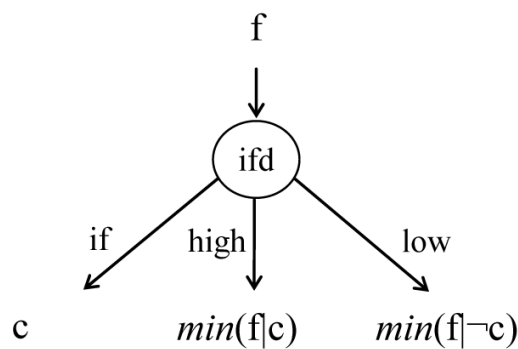


Рис. 3. Базовый фрагмент ДИФДР

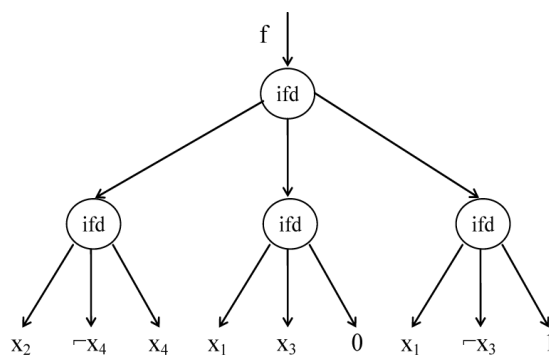


Рис. 4. Пример двоичной if диаграммы решений