УДК 62-50

ОПЕЙКО О. Ф.

ПОДЧИНЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Белорусский Национальный Технический Университет

Метод подчиненного управления развивается для случая параметрической неопределенности объекта. Рассматривается двухконтурная система с пропорционально-интегрирующими регуляторами, условия синтеза которой можно применить к системе со многими контурами. Необходимое в системе качество достигается при заданном распределении корней на комплексной плоскости. Распределение корней формируется с целью достижения малой чувствительности системы к изменениям параметров. Представленные примеры расчета показывают, что предложенные для параметрического синтеза регуляторов условия позволяют обеспечить принадлежность корней ограниченной области в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Введение

Подчиненное управление [1, 2] применяется в многоконтурных системах электроприводов промышленных установок ввиду известных преимуществ. Так, применяя ПИ-регуляторы, можно получить желаемое качество регулирования не только системы в целом, но и каждого контура. При подчиненном управлении есть возможность учета не моделируемой динамики в каждом контуре. Метод [1, 2] синтеза подчиненного управления по условиям модульного и симметричного оптимумов построен в предположении, что параметры объекта управления известны и постоянны, что играет ключевую роль в этом методе синтеза. Настройка регулятора каждого контура выполняется так, что характеристические полиномы контуров и системы в целом составляют семейство нормальных полиномов [3, 4] с фактором затухания, равным двум.

Необходимое в системе качество может быть достигнуто при различных распределениях корней на комплексной плоскости, в то время, как при подчиненном управлении оно предопределено видом нормального полинома. Если ПИ регулятор каждого контура синтезировать методом модального управления [5], назначение корней, а, следовательно, и выбор желаемого характеристического полинома возможно выполнять с учетом требования робастности.

Проблема робастного синтеза [6] привлекает внимание исследователей в связи с возрастанием требований к системам управления, расширением их области применения и развитием технических возможностей для реализации алгоритмов управления.

Целью работы является определение условий параметрического синтеза ПИ-регуляторов многоконтурной системы по расположению корней в заданной области в условиях изменений параметра объекта каждого контура.

Синтез двухконтурной системы

Двухконтурная система имеет пропорционально-интегрирующие (ПИ)-регуляторы K и K_1 в каждом из контуров (рисунок 1). Поскольку структура регуляторов в контурах задана, синтез сводится к определению параметров регуляторов. Передаточные функции регуляторов имеют вид

$$K(s)=c_1\left(1+\frac{c_0}{s}\right),\quad K_1(s)=c_{11}\left(1+\frac{c_{01}}{s}\right),$$

Звенья объекта управления в каждом из контуров должны быть представлены передаточными функциями первого порядка по условию разрешимости задачи модального управления [4] с ПИ-регулятором первого порядка

$$V_1(s)=\frac{k_1a_1}{s+a_1},\quad V(s)=\frac{k_\alpha a}{s+a},$$

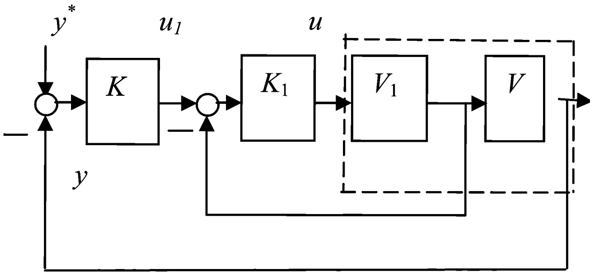

Рис. 1. Структура системы

Параметр a объекта управления подвержен изменениям и принадлежит интервалу: $a \in \left(\underline{a}, \overline{a}\right)$ По условию разрешимости задачи модального управления с ПИ-регулятором при синтезе внешнего контура делается допущение, что внутренний контур $W_1(s)$ является безынерционным звеном [7].

$$W_1\left(s\right) = \frac{K_1\left(s\right)V_1\left(s\right)}{1 + K_1\left(s\right)_1 V_1\left(s\right)} = \frac{M_1\left(s\right)}{N_1\left(s\right)} \approx 1. \qquad (1)$$

Обозначив желаемые значения корней $s_{1,2} = -\alpha_0 \pm j\omega_0$, а их модуль $r_0^2 = \alpha_0^2 + \omega_0^2$, расчетный полином внешнего контура запишем в виде

$$N_{02}\left(s\right) = s^2 + 2\alpha_0 s + r_0^2, \qquad (2)$$

Параметры регулятора внешнего контура легко определяются из условия равенства расчетного и фактического полиномов с учетом предположения (1).

$$b_1 = 2\frac{\alpha_0}{\underline{a}} - 1, \;\; b_0 b_1 = 2\frac{r_0^2}{\overline{a}}.$$

Однако в действительности характеристический полином $N(s)$ замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} N(s) &= s(s+\alpha_e)N_m(s) + \alpha b_1\left(s + b_0\right) = \\ &= s^2\overline{N}_m(s) + d_0 N_{02}(s). \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь полином $N_m(s)$ степени m отображает не моделируемую динамику, которая не учтена при синтезе внешнего контура и зависит от свойств внутреннего контура, а d_0 – свободный член полинома $N_m(s)$,

$$N_m(s) = s^m + d_{m-1}s^{m-1} + d_{m-2}s^{m-2} + \ldots + d_1 s + d_0.$$

Полином $\overline{N}_m(s)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{N}_m(s) &= s^m + s^{m-1}\left(d_{m-1} + a\right) + \\ &+ s^{m-2}\left(d_{m-2} + d_{m-1}a\right) + \ldots + s\left(d_1 + d_2\alpha\right) + ad_1. \end{aligned}$$

Возникает вопрос, каким должен быть полином $N_m(s)$, чтобы полином $N(s)$, имел m корней, мало отличающихся от корней $N_m(s)$, и два корня $-\alpha \pm j\omega$, мало отличающихся от заданных корней $s_{01,2} = -\alpha_0 \pm j\omega_0$ расчетного полинома $N_{02}(s)$. Иными словами, полином $N_m(s)$, должен иметь корни, достаточно удаленные влево от начала координат комплексной плоскости корней, чтобы внутренний контур считать безынерционным.

Полином $N_m(s)$ формируется в процессе синтеза внутренних контуров, и должен удовлетворять условиям

$$\left|s_i\right| \in \left(\underline{\sigma}, \overline{\sigma}\right), \;, \; d_{i-1}/d_i \ge \underline{\sigma}./m\,, \qquad (4)$$

Необходимое условие принадлежности корней полинома $N_m(s)$ сектору $\pi \pm \varphi_0$ для коэффициентов полинома имеет вид [4]

$$\frac{d_i^2}{d_{i-1}d_{i+1}} \ge \frac{\left(n-i+1\right)\left(i+1\right)}{\left(n-i\right)i}\left(1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}\varphi_0\right), \qquad (5)$$
$$\left(i = 0, 1, 2, \ldots m-1\right).$$

Корни $s_{1,2} = -\alpha_0 \pm j\omega_0$ полинома внешнего контура отображают желаемое качество системы, и могут изменяться внутри допустимой области при соблюдении условий

$$\frac{r_0}{\underline{\sigma}} \le \varepsilon_0 \quad \frac{\overline{a}}{\underline{\sigma}} \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0. \qquad (6)$$

Корни полинома (3) не совпадают с корнями входящих в него полиномов, но отличие тем меньше, чем меньше φ_0, ε_0. В самом деле, учитывая выражение полинома (3) характеристическое уравнение замкнутой системы можно представить в виде

$$-s^2\overline{N}_m(s) = d_0 N_{02}(s)\,. \qquad (5)$$

Если $s = s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ и $r^2 = \alpha^2 + \omega^2 < \underline{\sigma}$, то полином $\overline{N}_m(s)$, принимает значение

$$\left|\overline{N}_m(s)\right| = \left(P^2 + Q^2\right)^{1/2} \le \alpha_1 d_1\,,$$

учитывая чередование знаков слагаемых.

Выражение (5) полинома $N_{02}(s) = (s - s_{01})\times(s - s_{02})$ при значениях $s = s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, дает

$$\begin{aligned} &d_0\left(\alpha_0 - \alpha + j\left(\omega - \omega_0\right)\right)\left(\alpha_0 - \alpha + j\left(\omega + \omega_0\right)\right) = \\ &\qquad = -s_1^2\overline{N}_m\left(s_1\right), \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &d_0\left(\alpha_0 - \alpha + j\left(-\omega - \omega_0\right)\right)\left(\alpha_0 - \alpha + j\left(-\omega + \omega_0\right)\right) = \\ &\qquad = -s_2^2\overline{N}_m\left(s_2\right). \end{aligned}$$

Таблица 1. **Корни характеристических полиномов контуров регулирования (контуры нумеруются, начиная с внутреннего)**

Номер контура	Порядок полинома контура	Значения корней при ε = 0,1	tg φ	Модуль минимальный
0	2	$s_1 = -10^3$, $s_2 = -10^3$	0	10^3
1	4	10^3 *(–1,3332 – 0,4078 – 0,2284 – 0,0805)	0	80,5
2	6	10^3 *(–1,3333 – 0,4031 – 0,2425 – 0,0578 – 0,0133 – 0,0100)	0	10
3	8	10^3 *(–1,3333 – 0,4031 – 0,2425 – 0,0577 –0,0156 – 0,0064 – 0,0013 – 0,0010)	0	1,0
4	10	10^3 *(–1,3333 – 0,4031 – 0,2425 – 0,057 – 0,0156 – 0,0064 – 0,0016 – 0,0006 – – 0,0001 – 0,0001)	0	0,1

Таблица 2. **Корни характеристических полиномов контуров регулирования (параметры объекта вдвое меньше расчетных)**

Номер контура	Порядок полинома контура	Значения корней при ε = 0,1	tg φ	Модуль доминирующего корня
0	2	$s_1 = -10^3$, $s_2 = -10^3$	0	10^3
1	4	10^3 *(–1,2415 – 0,6782 – 0,0526 + 0,0563*i* – 0,0526 – 0,0563i)	1,07	80,5
2	6	10^3 *(–1,2416 – 0,6779 – 0,0472 + 0,0496*i* – 0,0472 – 0,0496*i* – 0,0081 + + 0,0078*i* – 0,0081 – 0,0078*i*)	1,07	11,5
3	8	10^3 *(–1,2416 – 0,6779 – 0,0471 + 0,0496*i* – 0,0471 – 0,0496*i* – 0,0076 + + 0,0071*i* – 0,0076 – 0,0071*i* – 0,0008 + 0,0007*i* – 0,0008 – 0,0007*i*)	1,07	1,0
4	10	10^3 *(–1,2416 – 0,6779 – 0,0471 + 0,0496*i* –0,0471 – 0,0496*i* – 0,0076 + + 0,0071*i* – 0,0076 – 0,0071*i* – 0,0007 + 0,0007*i* – 0,0007 – 0,0007*i* – – 0,0001 + 0,0001*i* – 0,0001 – 0,0001*i*)	1,07	0.14

Поскольку $\left|\Delta r\right|^2 = \left(\left(\alpha_0 - \alpha\right)^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2\right)$, перемножение выражений позволяет получить квадрат $\varepsilon^2 = \left(\Delta r / r\right)^2$ модуля $\varepsilon = \Delta r / r$ относительного изменения корней по сравнению с расчетными значениями. При $\omega_0 = 0$

$$\left(\Delta r\right)^2 / r^2 = d_0^{-1} \left|\bar{N}_m(s_i)\right| < a\, d_1 / d_0. \qquad (7)$$

Поскольку в соответствии с (4) $d_1/d_0 < m / \underline{\sigma}$, то

$$\left(\Delta r\right)^2 / r^2 < m\varepsilon_0 . \qquad (8)$$

Таким образом, в двухконтурной системе допустимо пренебрежение инерционностью внутреннего контура, если внутренний контур имеет характеристический полином, удовлетворяющий условиям (4), (5) а регулятор внешнего контура формируется на основании равных действительных полюсов контура при соблюдении условия (6) и достаточно малом ε_0.

Пример расчета для многоконтурной системы

В таблицах 1, 2 приводятся результаты расчета корней характеристических полиномов контуров в четырехконтурной системе с расчетными параметрами объекта $a_1 = 50$, $a_2 = 10$, $a_2 = 1,0$, $a_2 = 0,10$. В качестве расчетных принимаются наибольшие значения из заданного интервала в соответствии с выражением (6). Значение индекса соответствует номеру контура.

На рис. 2 показаны значения коней характеристических полиномов контуров регулирования при ε = 0,2*,* соответствующие табл. 2. Круглым маркером показаны расчетные значения корней, а квадратным – при значениях параметров объекта, уменьшенных вдвое по сравнению с расчетными параметрами.

Результаты расчетов при ε = 0,1 в соответствии с табл. 1 показывают, что корни полиномов всех контуров действительные отрицательные, поэтому $\mathrm{tg}\,\varphi = 0$. Если же параметры объекта во всех контурах уменьшаются вдвое по сравнению с расчетными значениями, появляются комплексные корни, принадлежащие ограниченному сектору с $\mathrm{tg}\,\varphi = 1,07$.

При ε = 0,2 в соответствии с табл. 2 корни получаются комплексные, лежащие в секторе $\mathrm{tg}\,\varphi = 1,88$. Если параметры объекта уменьшаются вдвое по отношению к расчетным значениям, как видно из рис. 2, корни не выходят за пределы сектора $\mathrm{tg}\,\varphi = 2,0$ и вместе с тем максимум мнимых частей уменьшается.

В системе подчиненного регулирования при настройке контуров на модульный опти-

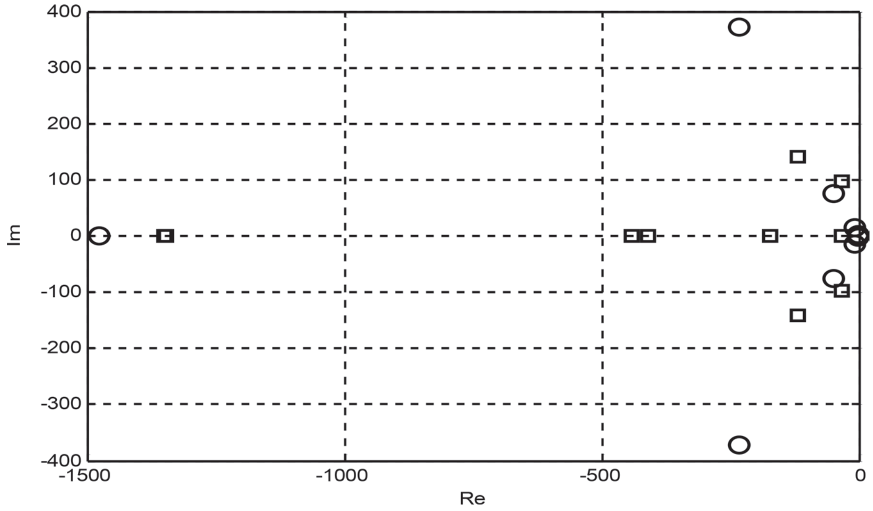

Рис. 2. Корни характеристических полиномов контуров регулирования при $\varepsilon = 0{,}2$

мум [1, 2] $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{3}/2$, однако при изменениях параметров некоторые из корней могут выходить за пределы сектора $\mathrm{tg}\,\varphi = 2{,}0$.

Заключение

Предложенный метод параметрического синтеза ПИ-регуляторов многоконтурной системы позволяет произвольно формировать показатели качества контуров и учитывать изменения параметров объекта, что является преимуществом.

Робастные свойства системы достигаются уменьшением величины ε, а, следовательно, ценой снижения быстродействия системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kessler C.** Über die Vorausberechnung optimal abgestimmer Regelkreise. – Regelungstechnik, 1954, № 12. s. 274–281.
2. Системы подчиненного регулирования электроприводов переменного тока с вентильными преобразователями / О. *В.* Слежановский, *Л. Х.* Дацковский, *И. С. Кузнецов и др*. – М.: Энергоатомиздат, 1983. 256 с.
3. **Naslen P.** Polinomes normaux et critere algebrique d'amortissement (I). Automatisme, tome VIII, n 6, 1963.
4. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза. /Б. Н. Петров, Н. И. Соколов, А. В. Липатов и др.. М.: Машиностр., 1986. 256 s.
5. **Кузовков Н. Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение. 1976.
6. **Поляк Б. Т.** Робастная устойчивость и управление./ Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. 303 с.
7. **Опейко О. Ф.** Синтез линейной системы на основании упрощенной модели объекта. // АиТ. 2005. № 1. С. 29–35.

Поступила 25.08.15

OPEIKO O. F., BNTU

CASCAD CONTROL FOR PLANT WITH PARAMETER UNSERTAINTY

The cascade control is developed for the case of plant parameters uncertainty. The two loops system is considered with proportional- integrate (PI) controllers, such the parametric synthesis can be generalized for multi loops systems. The necessary quality of the system is achieved by the correct polynomial's roots location on a complex plane. The roots location is defined to achieve the low sensitivity of the system to plant's parameters variations. The multiples numerical examples are presented for developed method, which demonstrate the belonging of polynomials roots to the restricted area of left hand half of complex plane for various multi loops systems.