

В. В. ЛЕГКОСТУП, В. Э. МАРКЕВИЧ

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ ДО ОБЪЕКТА В РАЗНОСТНО- ДАЛЬНОМЕРНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ ПО ДОПЛЕРОВСКИМ СМЕЩЕНИЯМ ЧАСТОТЫ

ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Республика Беларусь

*В данной работе приведена методика оценивания дальности до объекта, наводимого вдоль гиперболы на цель с помощью бистатической разностно-дальномерной навигационной системы на плоскости. При этом для решения задачи наведения количество требуемых навигационных позиций уменьшается на одну по сравнению с классическим методом разностно-дальномерной навигации. Однако в алгоритмах наведения все же требуется иметь некоторую оценку дальности наводимого объекта от центра базы, способы получения которой рассмотрены в работе.*

**Ключевые слова:** разностно-дальномерная навигация, бистатическая система, гипербола положения, измерение доплеровского смещения частоты, измерение дальности.

### Введение

Множество современных беспилотных транспортных средств оснащаются различными навигационными системами, как инерциальными, так и работающими благодаря внешним навигационным системам. При этом преимуществом разностно-дальномерных навигационных систем, таких как спутниковые навигационные системы, системы типа LORAN, и другие является с одной стороны возможность иметь обслуживать большой поток абонентов, так как информация передается только в одном направлении (от навигационной системы к абоненту), а с другой стороны снизить стоимость и размеры и энергетические требования к абонентскому оборудованию за счет отсутствия необходимости размещать передатчик ответно-запросного сигнала [1]. В [2–3] рассматриваются некоторые использования разностно-дальномерного способа навигации в условиях недостаточного для решения навигационных уравнений количества позиций, когда совокупность навигационных измерений позволяет определить местоположение абонента с точностью до гиперболы положения. При этом разностно-дальномерная навигационная система состояла из двух передающих позиций для плоскостного случая

и трех для пространственного. Используя такие начальные условия задачу попадания абонента в некоторую точку цели можно решить путем наведения абонента вдоль гиперболы положения, проходящей через цель.

Однако если абонент обладает информацией о векторе собственной скорости (используя доплеровский измеритель скорости, БИНС, измерения воздушного напора) и оценивая при этом доплеровские сдвиги частоты с двух передающих позиций (плоскостная задача) и разность дальностей, абонент имеет возможность оценить свою дальность с некоторой точностью вблизи линии базы. Методика определения скорости приведена ниже.

### Методика оценивания дальности до подвижного абонента в разностно-дальномерной навигационной системе с использованием оценки доплеровских сдвигов частоты

Рассмотрим бистатическую разностно-дальномерную навигационную систему, образованную двумя передающими позициями  $P_1, P_2$  с известной длиной базы, равной  $2c$  и подвижный беспилотный летательный аппарат Б,двигающийся в сторону базы со скоростью  $V_0$  (рис. 1).

Объект осуществляет измерения собственной скорости  $V_0$ , доплеровских сдвигов частот

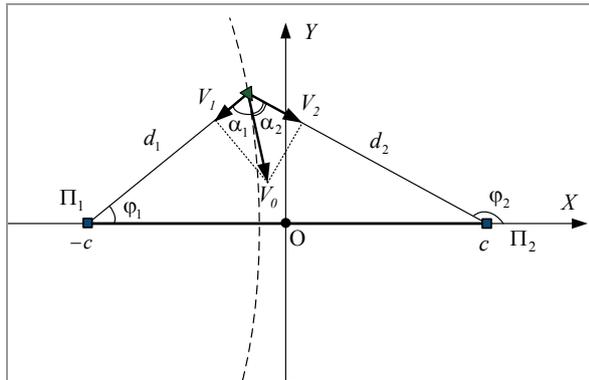


Рис. 1. Разностно-дальномерная навигационная система и подвижный объект, где  $c$  – фокусное расстояние или полубаза;  $d_1, d_2$  – дальности от навигационных позиций до объекта;  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы визирования объекта по отношению к базе;  $V_1, V_2$  – проекции вектора скорости объекта на линии дальностей;  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы между вектором скорости и его проекциями соответственно.

$\Delta f_1, \Delta f_2$  принимаемых навигационных сигналов и разность временных задержек распространения  $\Delta t$  навигационного сигнала от позиций до объекта. При этом доплеровские сдвиги частот связаны с проекциями скорости объекта на радиус-векторы дальностей выражениями

$$\Delta f_1 = \frac{V_1}{\lambda}, \tag{1}$$

$$\Delta f_2 = \frac{V_2}{\lambda}.$$

где  $\lambda$  – частота навигационного сигнала.

В свою очередь разность временных задержек  $\Delta t$  зависит от разности дальностей в соответствии с выражением

$$\Delta t = \frac{d_1 - d_2}{c_0}, \tag{2}$$

где  $c_0$  – скорость распространения навигационного сигнала.

Изучение кинематических связей проще осуществлять в эллиптической системе координат в альтернативном представлении, в которой положение объекта задается двумя параметрами:  $\sigma$  определяет линию положения в виде эллипса,  $\tau$  определяет линию положения в виде гиперболы, причем данные линии являются взаимно ортогональными. Связь данных координат с радиус-векторами дальностей между позициями и объектам осуществляется выражениями [4]

$$\sigma = \frac{d_1 + d_2}{2c}, \tag{3}$$

$$\tau = \frac{d_1 - d_2}{2c}.$$

Из рисунка 1 видно, что скорость объекта  $V_0$  связана с радиальными скоростями  $V_1, V_2$  соотношениями

$$\frac{V_1}{V_0} = \cos \alpha_1, \tag{4}$$

$$\frac{V_2}{V_0} = \cos \alpha_2,$$

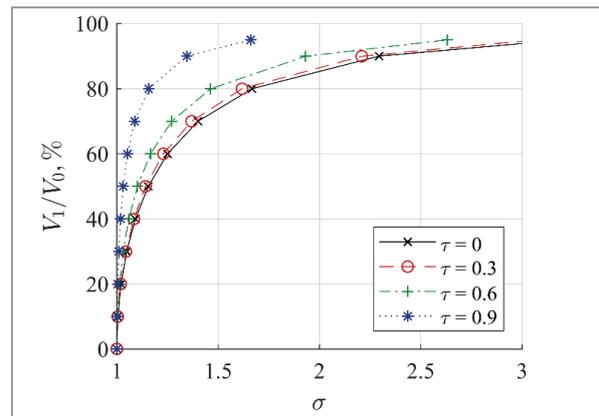
зависимость которых от параметра  $\sigma$  приведена на рисунке 2а.

При этом связь углов треугольника, образованного точками  $\Pi_1, \Pi_2, B$  определяется равенством

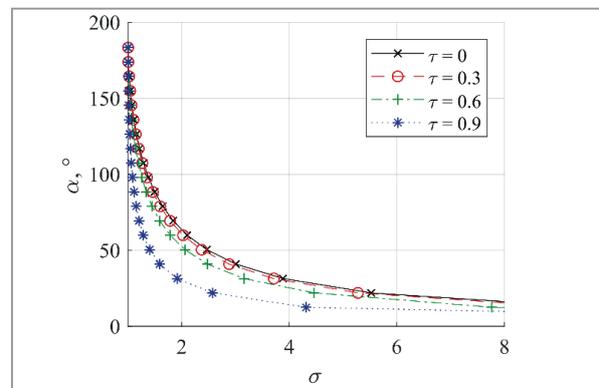
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha, \tag{5}$$

где  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  – угол, под которым наблюдается база с позиции объекта.

Зависимость угла  $\alpha$  от эллиптической дальности  $\sigma$  представлена на рис. 2б.



а



б

Рис. 2. Зависимость от эллиптической дальности  $\sigma$  отношения  $V_1/V_2$  (а) и угла  $\alpha$  (б) для разных значений параметра  $\tau$ .

Дальности до объекта можно выразить, используя следующие соотношения [4]:

$$d_1 = \frac{c(1-\tau^2)}{\tau - \cos \varphi_1}, \quad d_2 = \frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_2}. \quad (6)$$

Собирая воедино второе выражение в (3) и (6), получим следующее соотношения

$$\frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_1} + \frac{c(\tau^2 - 1)}{\tau - \cos \varphi_2} = 2c\tau, \quad (7)$$

а используя выражение (5) найдем окончательное выражение для определения угла визирования объекта (с точностью до знака):

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\tau}{2} \left( 1 + \cos \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sgn} \tau \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\tau^2} - \cos \alpha - 1} \right), \\ \cos \varphi_2 &= \frac{\tau}{2} \left( 1 + \cos \alpha - \sqrt{2} \operatorname{sgn} \tau \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\tau^2} - \cos \alpha - 1} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя выражение координаты  $x$  объекта через его эллиптические координаты:

$$x = c\sigma\tau, \quad (9)$$

а также через полярные координаты:

$$x = d_1 \cos \varphi_1 - c, \quad (10)$$

найдем связь эллиптической дальности  $\sigma$  объекта через его угол визирования со стороны базы:

$$\hat{\sigma} = \frac{\tau \cos \varphi_1 - 1}{\tau - \cos \varphi_1}. \quad (11)$$

### Результаты и их обсуждение

Предположим, для вычисления дальности  $\hat{\sigma}$  по приведенным выше формулам объект реализует измерения скоростей  $\hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{V}_2$ . Будем считать, что шумы данных измерений распределены по закону Гаусса:

$$\begin{aligned} \hat{V}_0 &= V_0 + \xi_{V_0}, \quad \xi_{V_0} \sim N(0, \sigma_{V_0}^2), \\ \hat{V}_1 &= V_1 + \xi_{V_1}, \quad \xi_{V_1} \sim N(0, \sigma_{V_1}^2), \\ \hat{V}_2 &= V_2 + \xi_{V_2}, \quad \xi_{V_2} \sim N(0, \sigma_{V_2}^2), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\xi_{V_0}, \xi_{V_1}, \xi_{V_2}$  – белые гауссовские шумы измерений;

$\sigma_{V_0}^2, \sigma_{V_1}^2, \sigma_{V_2}^2$  – дисперсии шумов  $\xi_{V_0}, \xi_{V_1}, \xi_{V_2}$  соответственно.

Статистические характеристики величины  $\hat{\sigma}$ , получаемой с помощью выражений (4), (8) и (11), в аналитическом виде получить довольно

сложно. Это обусловлено множеством нелинейных комбинаций и трансформаций величин  $\alpha_1, \alpha_2, \tau$  в (8) и (11). Кроме того, используя предположение (12) можно заключить, что оценки  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ , получаемые из выражения (4), являются случайными процессами, имеющими распределение Коши [5], характеризующееся тяжелыми хвостами. Это приводит к быстрому снижению точности получаемой оценки  $\hat{\sigma}$  по мере роста дальности между объектом и базой. В общем случае для решения задачи фильтрации имеет смысл прибегнуть к использованию робастных методов фильтрации, менее подверженных влиянию выбросов.

Изучение статистических характеристик оценки величины  $\hat{\sigma}$  по приведенному выше алгоритму исследовалось методом Монте-Карло с объемом выборки равном 100000 испытаниям для каждого случая. Скорость  $V_0$  объекта, движущегося к базе, принималась равной 100 м/с. На рис. 3 (а–г) представлены зависимости выборочного среднего  $E[\hat{\sigma}]$ , выборочной дисперсии  $D[\hat{\sigma}]$ , выборочного коэффициента асимметрии  $\kappa_3$ , выборочного коэффициента эксцесса  $\kappa_4$  от реальной эллиптической дальности  $\sigma$  для различных величин  $\tau$ . Из этих рисунков видно, что с ростом параметра  $\sigma$  характеристики закона распределения величины  $\hat{\sigma}$  быстро изменяются, что существенно ухудшает качество получаемых оценок, которые становятся все более смещенными в совокупности с растущими выбросами относительно их среднего. Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса указывают на значительный рост интенсивности выбросов с увеличением  $\sigma$ . На дальности  $\sigma = 3$ , соответствующей удалению объекта от центра базы приблизительно на удвоенную длину базы, смещение выборочного среднего достигает 0,2 (около 7%).

Оценить величину  $\sigma$  можно более точно в случае, если объект пересекает линию базы. Дифференцируя по времени первое выражение в получим скорость изменения величины  $\sigma$ :

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{d}_1 + \dot{d}_2}{2c}. \quad (13)$$

Интегрирование выражения (13) необходимо начать точно в момент пересечения базы, что даст искомую оценку  $\hat{\sigma}$ :

$$\hat{\sigma} = 1 + \frac{1}{2c} \int_{t_0}^T (\hat{V}_1 + \hat{V}_2) dt, \quad (14)$$

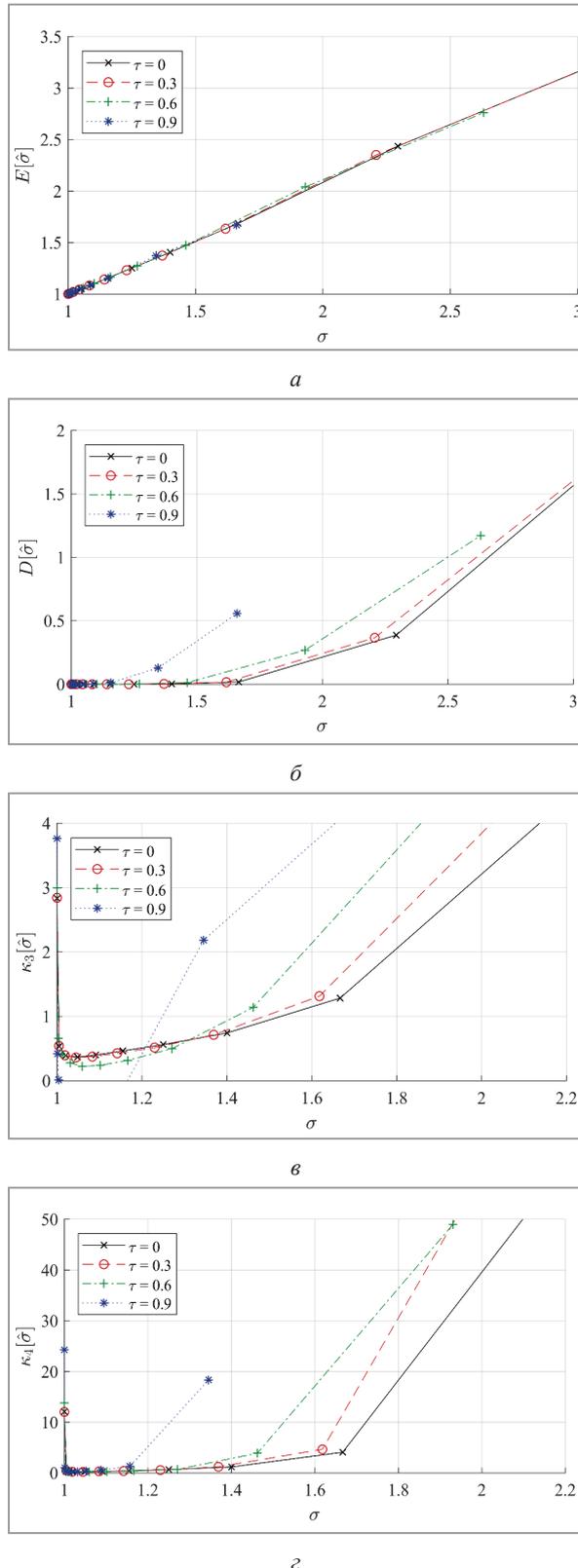


Рис. 3. Зависимости статистических характеристик оценки  $\hat{\sigma}$  от реальной эллиптической дальности  $\sigma$ : а – выборочное среднее  $E[\hat{\sigma}]$ , б – выборочная дисперсия  $D[\hat{\sigma}]$ , в – коэффициент асимметрии  $\kappa_3[\hat{\sigma}]$ , г – коэффициент эксцесса  $\kappa_4[\hat{\sigma}]$ .

где  $T$  – текущий момент времени, в который производится съем оценки  $\hat{\sigma}$ , отсчитываемый с момента пролета линии базы  $t_0$ .

Оценка, получаемая с помощью выражения (14), может быть описана различными моделями. Предлагается описывать величину  $\hat{\sigma}$  в виде процесса броуновского движения с коэффициентом сноса, зависящим от времени [6–7]:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \chi^2 dW_t \quad (15)$$

где  $\mu(t)$  – коэффициент сноса;

$\chi^2$  – коэффициент диффузии;

$\delta W(t)$  – стандартный винеровский процесс.

При этом для момента времени  $t$  решение уравнения (15) имеет вид

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \mu(\tilde{t})d\tilde{t} + \chi^2 W(t), \quad (16)$$

где  $X_0$  – стартовая точка процесса в момент времени  $t_0$ .

Поскольку предполагается нормальность шумов оценок  $\hat{V}_1, \hat{V}_2$ , то выражение (14) в соответствии с моделью можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 1 + \frac{1}{2c} \int_{t_0}^T (V_1(t) + V_2(t) + \xi_V(t)) dt = \\ &= 1 + \frac{1}{2c} \int_{t_0}^T (V_1(t) + V_2(t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{t_0}^T \xi_V(t) dt \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\xi_V(t) = \xi_{V_1}(t) + \xi_{V_2}(t)$  – суммарный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией  $\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2$ .

Тогда, в соответствии с выражением (16) величина  $\hat{\sigma}$  имеет среднее значение

$$\langle \hat{\sigma}(T) \rangle = \frac{d_1(T) + d_2(T)}{2c}, \quad (18)$$

и дисперсию

$$D[\hat{\sigma}(T)] = \frac{(\sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2)}{4c^2} (T - t_0). \quad (19)$$

Реальные оценки среднего и дисперсии, получаемые по формулам (18) и (19) и будут иметь некоторое смещение вследствие неучтенной погрешности оценки момента времени  $t_0$  пересечения линии базы объектом. Эта проблема в рамках данной статьи не рассматривалась ввиду необходимости учета модели динамики объекта и его траектории движения.

На рис. 4 приведена траектория движения летательного аппарата на плоскости, скорость которого  $V_0 = 200$  м/с, наводимого с помощью разностно-дальномерной навигационной системы вдоль целевой гиперболы положения с параметром  $\tau_0 = 0.17$  и длиной базы  $2c = 800$  м.

На рис. 5(a–в) приведены реализации оценки  $\hat{\sigma}$  с использованием выражений (4), (5), (8), (11) для смоделированной траектории движения БЛА, представленной на рис. 4. На рис. 5(г) приведена реализация той же оценки до момента пересечения линии базы, после чего оценка производилась по выражению (14).

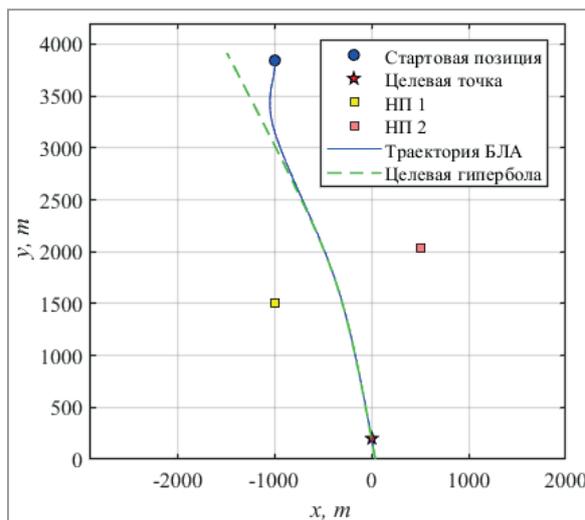
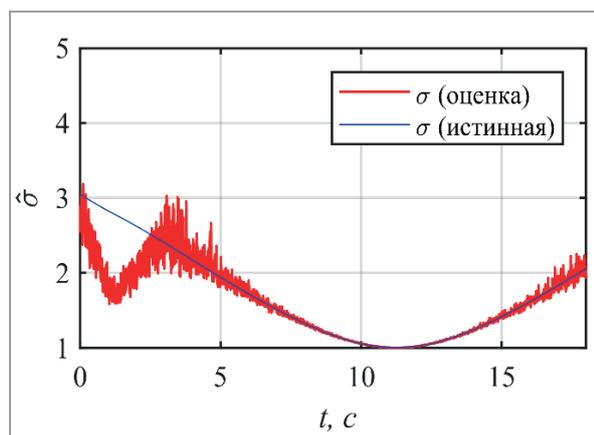
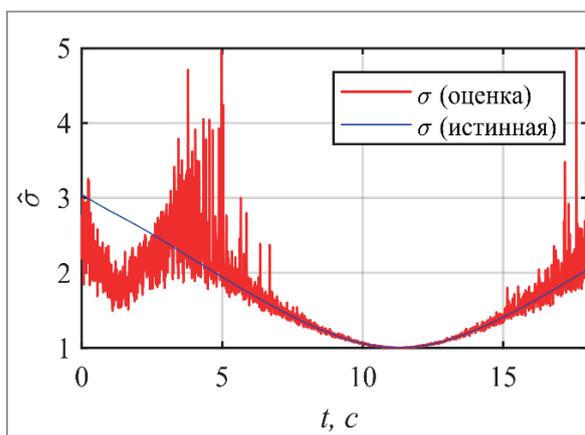


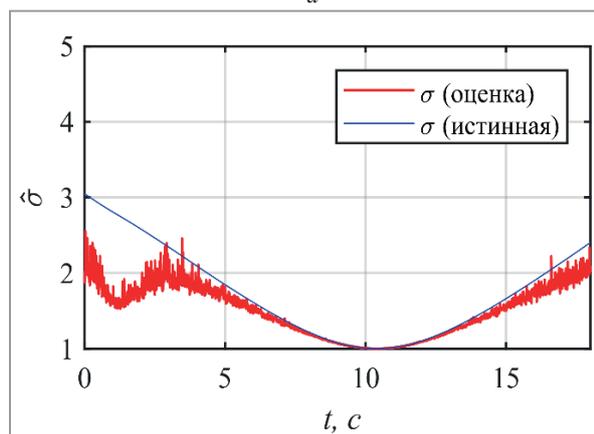
Рис. 4. Траектория движения БЛА, где НП – навигационная позиция.



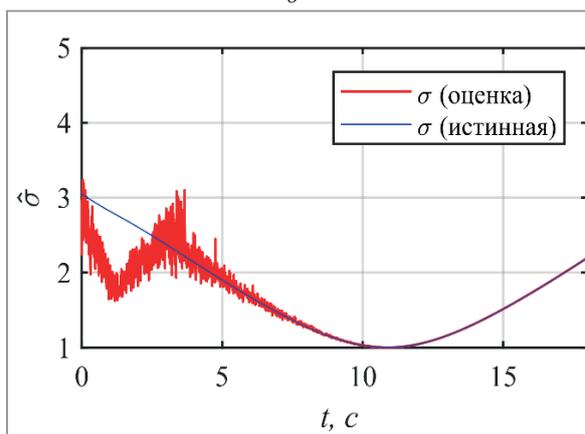
a



б



в



г

Рис. 5. Типичные реализации оценок  $\hat{\sigma}$ , полученные по результатам компьютерного моделирования движения БЛА по траектории, приведенной на рис. 4 для различных статистических характеристик измерений скорости:

$$a - \sigma_{V_0} = 5 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 3 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 3 \text{ м/с}; \quad б - \sigma_{V_0} = 10 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 6 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 6 \text{ м/с};$$

$$в - \sigma_{V_0} = 5 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 3 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 3 \text{ м/с},$$

а также на 5% смещено среднее значение  $V_0$ ; г -  $\sigma_{V_0} = 5 \text{ м/с}, \sigma_{V_1} = 3 \text{ м/с}, \sigma_{V_2} = 3 \text{ м/с}$ .

### Заключение

Приведенная в данной статье методика оценки дальности до объекта в разностно-дальномерной навигационной системе в соответствии с результатами компьютерного моделирования показала свою работоспособность. Были получены зависимости различных статистических моментов полученных оценок от дальности между объектом и базой.

По результатам анализа данных зависимостей было установлено, что на расстояниях от центра линии базы до объекта, превышающих одну-две длины базы, точность оценок существенно снижается в результате появления смещения выборочного среднего, роста дисперсии. Быстрый рост коэффициента эксцесса значительно усложняет получение адекватных измерений на больших дальностях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Groves, P.D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, 2nd ed., Artech House, 2013.
2. Легкоступ В.В., Маркевич В.В. Уравнения кинематики беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат при наведении по разностно-дальномерной навигационной информации. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021; (1):12–20.
3. Легкоступ В.В. Методика определения кинематической связи между управляющими летательным аппаратом ускорениями и его эллиптическими координатами в альтернативном представлении. «Системный анализ и прикладная информатика». 2021; (3):15–24.
4. “Elliptic coordinates”, Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер; ред. А.Н. Колмогоров; пер. с англ. Р.Л. Добродушина, А.А. Юшкевич, С.А. Молчанова. – Изд. 2-е. – М.: Мир, 1967. – Том 1. – 496 с.: ил.
6. Henderson D, Plaschko P. Stochastic Differential Equations in Science and Engineering. World Scientific, 2006.
7. Allen E. Modeling with Itô Stochastic Differential Equations. Vol. 22. Springer ScienceBusiness Media, 2007.

### REFERENCES

1. Groves P.D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, 2nd ed., Artech House, 2013.
2. Legkostup V.V., Markevich V.E. Methodology of determining of the transfer function of engagement kinematics of accelerations of an aircraft and its elliptic coordinates used for thr guidance based on time difference of arrival. «System analysis and applied information science». 2021;(1):12–20.
3. Legkostup V.V. Methodology of determining of the transfer function of engagement kinematics of accelerations of an aircraft and its elliptic coordinates in alternative representation. «System analysis and applied information science». 2021;(3):15–24.
4. “Elliptic coordinates”, Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001.
5. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications,” Vol. I, JohnWiley, New York, 1957.
6. Henderson D, Plaschko P. Stochastic Differential Equations in Science and Engineering. World Scientific, 2006.
7. Allen E. Modeling with Itô Stochastic Differential Equations. Vol. 22. Springer ScienceBusiness Media, 2007.

Поступила  
01.11.2021

После доработки  
15.11.2021

Принята к печати  
01.12.2021

VICTOR V. LEGKOSTUP, VITALY E. MARKEVICH

## METHOD FOR DETERMINING OF THE DISTANCE TO THE OBJECT IN THE HYPERBOLIC NAVIGATION SYSTEM VIA DOPPLER FREQUENCY OFFSETS

JSC «ALEVKURP» (Minsk, Republic of Belarus)

*In this paper, a method for estimating the distance to the object guided along a hyperbola to a target using a bistatic hyperbolic navigation system on a plane is given. At the same time, to solve the guidance problem, the number of required navigation positions is reduced by one in comparison with the classical method of hyperbolic navigation. However, in the guidance algorithms, it is still required to estimate the distance of the targeted object from the center of the base, the methods of obtaining which are considered in the work.*

**Keywords:** hyperbolic navigation, bistatic navigation, position hyperbola, Doppler frequency shift, range measurement.



**Легкоступ Виктор Валерьевич**, магистр технических наук, научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП», Беларусь, Минская обл.

**Legkostup Victor Valeryevich**, research officer, JSC “ALEVKURP”, Minsk, Belarus.

E-mail: legkostupvv@gmail.com



**Маркевич Виталий Эдмундович**, кандидат технических наук, зам. директора ООО «Научно-производственное объединение САМЕРА», Беларусь, г. Минск.

**Markevich Vitaliy Edmundovich**, PhD, deputy director of LLC “SAMERA”, Minsk, Belarus.

E-mail: mark.vit@tut.by.