

ЖУК А. А., БУЛОЙЧИК В. М.

НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО РЕСУРСА

Военная академия Республики Беларусь, Минск, Республика Беларусь

Данная статья посвящена особенностям решения задачи целочисленного нелинейного программирования, с помощью разработанного нейросетевого метода и алгоритма нелинейной оптимизации средства «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel. В предлагаемом нейросетевом методе решение поставленной задачи производится посредством рекуррентной нейронной сети (РНС) матричной архитектуры с t нейронами в каждой строке и n нейронами в каждом столбце. Все нейроны такой сети соединены друг с другом связями, причем сигнал с выхода нейрона может подаваться на его же вход. Нейросетевой метод характеризуется тем, что на входы упомянутой РНС подается входной вектор значений параметров оптимизируемой нелинейной целевой функции задачи распределения неоднородного ресурса, осуществляется расчет значений весовых коэффициентов связанных между собой нейронов и формируется сигнал РНС. Этот сигнал посредством нелинейной функции преобразуется в дискретный выходной сигнал, характеризующий значения квазиоптимального решения упомянутой задачи, величина которого изменяется от 0 до 1. Оценка эффективности решения рассматриваемой задачи выполняется при ее различных значениях показателя эффективности на основе разработанной имитационной модели РНС. В качестве показателей эффективности применения предлагаемого нейросетевого метода использовались – средняя относительная ошибка и время решения задачи. За точное решение принималось значение, полученное с помощью алгоритма нелинейной оптимизации средства «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel. Анализ полученных результатов экспериментальных исследований, предложенного нейросетевого метода, позволил сделать заключение о том, что в сравнении с существующим методом нелинейной оптимизации табличного процессора Microsoft Excel использование предлагаемого нейросетевого метода позволяет существенно (в 9,4 раза) снизить время решения задачи размерностью 10×8 ($t \times n$) и при этом обеспечить точность ее решения не менее чем 99,8%.

Ключевые слова: целочисленное нелинейное программирование, комбинаторная оптимизация, нейросетевая оптимизация, квазиоптимальное распределение, нейросетевой метод, рекуррентная нейронная сеть, оценка эффективности.

Введение

На практике часто встречаются задачи, целью которых является поиск оптимального варианта распределения некоторого ресурса. Примерами таких задач являются: распределение огневых средств ПВО по средствам воздушного нападения противника при максимизации числа уничтоженных целей в налете; распределение неоднородных сил по районам действий для максимизации полной вероятности обнаружения цели и т.д. При этом целевая функция $U(x)$ и система ограничений таких задач имеют следующий вид

$$U(x) = \sum_{i=1}^m c_j \left[1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_{ij} x_{ij}) \right] \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2)$$

где m, n – константы, предопределяющие размерность задачи (сложность);

c_j – константа, определяющая важность j -го мероприятия;

p_{ij} – значение показателя эффективности i -го средства при выполнении j -го мероприятия;

x_{ij} – параметр, принимающий значение 1, если i -е средство назначается для выполнения j -го мероприятия, и 0, если i -е средство не назначается.

Формализация задачи в виде целевой функции (1) и системы (2) представляет

собой задачу целочисленного нелинейного программирования.

Для решения подобных задач вообще и задачи распределения в частности используются различные точные и приближенные методы комбинаторной оптимизации. В большинстве случаев, методом, гарантирующим нахождение оптимального решения, является полный перебор всех возможных вариантов. Однако множество вариантов допустимых решений таких задач быстро растет с увеличением размерности входных данных, что делает на практике неприемлемым использование метода полного перебора.

Тем не менее, во многих областях деятельности, и особенно в военной, часто необходимо оперативно решать задачи рассматриваемого класса. При этом приближенное решение задачи, полученное в приемлемое время, более ценно, чем точное решение, найденное через недопустимый интервал времени. Данное обстоятельство и стимулировало развитие

различных приближенных методов решения комбинаторно-оптимизационных задач, среди которых наибольший интерес (с точки зрения рассматриваемой задачи) представляют нейросетевые методы.

Теоретические аспекты использования нейросетевого метода на основе рекуррентной нейронной сети матричной архитектуры

В рамках военно-научной школы «Современные методы и средства математического моделирования военных действий и военно-технических систем» для решения комбинаторно-оптимизационных задач был разработан нейросетевой метод на основе рекуррентной нейронной сети (РНС) матричной архитектуры [1–3]. Для рассматриваемого метода наиболее близким по реализации является метод на основе нейронной сети Хопфилда [4]. Основные отличия данных сетей представлены в таблице 1.

Таблица 1. Отличительные особенности нейронных сетей

Нейронная сеть Хопфилда	Рекуррентная нейронная сеть матричной архитектуры
Сигнал на входы нейронов с их выходов не подается	На входы нейронов подается сигнал с их выходов
Размерность сети для решаемой задачи определяется симметричной матрицей $n \times n$	Размерность сети для решаемой задачи определяется матрицей $m \times n$
При начальной инициализации весовых коэффициентов нейронов входной сигнал определяется значением вектора параметров целевой функции решаемой задачи	При начальной инициализации на входы нейронов подаются дополнительные параметры, характеризующие ограничения решаемой задачи

Указанные в таблице 1 особенности позволяют:

- на основе сети Хопфилда решать задачи комбинаторной оптимизации только с учетом ограничений, накладываемых на саму целевую функцию с симметричной матрицей эффективности;

- на основе матричной РНС при решении задачи комбинаторной оптимизации дополнительно учитывать ограничения в виде системы линейных уравнений.

Для решения задачи, учитывающую формализацию (1) и (2) предлагается архитектура матричной РНС (рис. 1), которая является разновидностью РНС, описанной в [3].

Решение задачи с помощью данной сети основано на установлении соответствия между функцией $E(w)$ вычислительной энергии РНС и целевой функцией (1). Выразив весовые

коэффициенты w нейронов РНС через параметры x решаемой задачи, имеется возможность за время переходных процессов в сети найти квазиоптимальное решение.

Пример перехода нейронов РНС в устойчивое состояние представлен на рис. 2.

На рис. 2 представлены два фрагмента одной области (двумерный массив) оперативной памяти (ОП) ПЭВМ при отладке имитационной модели РНС в среде программирования Borland C++ Builder. Здесь состояния нейронов РНС обозначены 1 или 0. Первый фрагмент ОП (рис. 2а) демонстрирует состояние нейронов РНС в начале переходного процесса. Через k итераций РНС приходит в устойчивое состояние (рис. 2б). При этом полученные значения выходов y_{ij} активных нейронов (рис. 1) образуют искомым результат целевой функции (1).

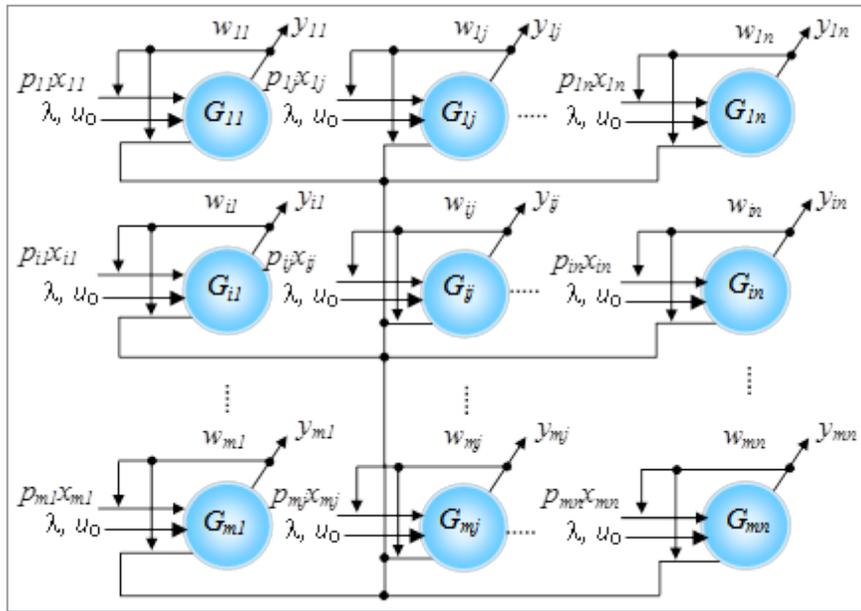


Рис. 1. Рекуррентная нейронная сеть матричной архитектуры

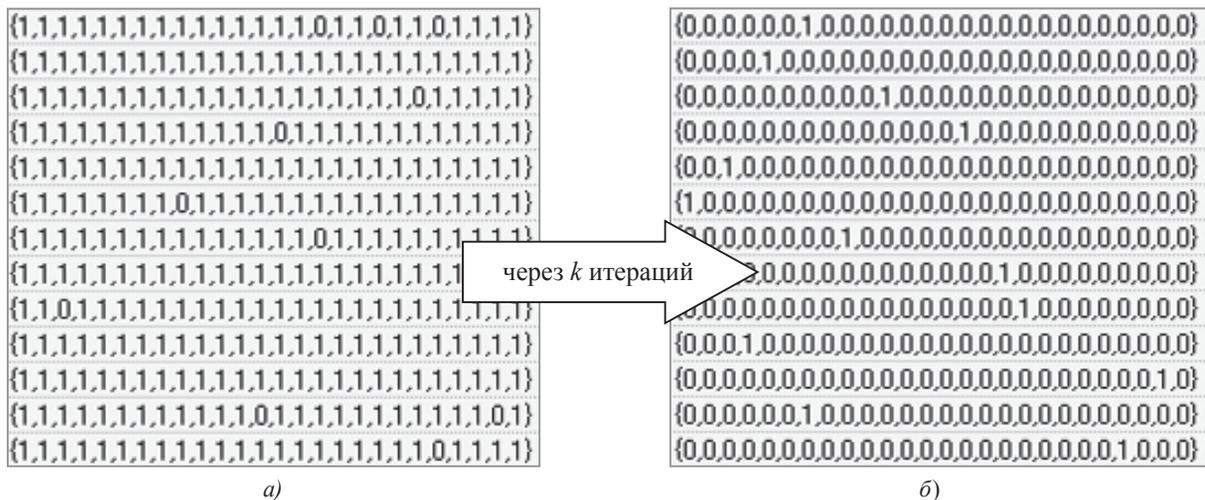


Рис. 2. Состояние нейронов при переходе РНС в устойчивое состояние: а) на первом шаге; б) на k-м шаге

Функция энергии сети, минимизация которой соответствует целевой функции решаемой задачи, имеет вид

$$E(w) = \sum_{ux=1}^m \sum_{ui=1}^n \left\{ \gamma_1 \sum_{j=1}^n (w_{ux,j} - 1) + \gamma_2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (w_{i,j} - m) + \gamma_3 \sum_{i=1}^m c_j \left[1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_{ux,ui} w_{i,j}) \right] \right\} \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – положительные величины, определяемые эмпирически (порядок использования данных величин подробно рассмотрен в [4, 5]);

w_{ij} – значения синаптических связей нейронов сети.

В этом выражении первое слагаемое требует не более одной единицы в каждой строке матрицы, что соответствует ограничению (2). Второе слагаемое удовлетворяет требованию наличия ровно m единиц средств назначения

в матрице распределения. Третье слагаемое соответствует целевой функции (1) задачи. При этом второе и третье слагаемые требуют наличия обратной связи «сам на себя».

Передаточные значения синаптических связей w_{ij} определяются в соответствии с выражением

$$w_{ij}^k = \frac{1 + \tanh\left(\frac{y_{ij}^k}{u_0}\right)}{2}, \quad (4)$$

где y_{ij}^k – значение состояния нейронов сети на k -й итерации;

u_0 – коэффициент, принимающий значения в диапазоне $(0...1]$ и влияющий на скорость перехода РНС в устойчивое состояние и точность решения.

В этом случае формируемый РНС сигнал посредством нелинейной функции преобразуется в дискретный выходной сигнал, величина которого изменяется от 0 до 1 (рис. 2).

Алгоритм нейросетевого метода решения рассматриваемой задачи на основе предлагаемой РНС (рис. 1) включает в себя следующую последовательность действий:

1. Первоначальные состояния ($k = 0$) всех нейронов сети y_{ij}^k проинициализировать значениями коэффициентов p_{ij} целевой функции (1). При этом необходимо значения коэффициентов p_{ij} , лежащие в произвольном диапазоне преобразовать к диапазону $[0 \div 1]$.

2. Значения синоптических связей w_{ij}^k (при $k = 0$) всех нейронов сети установить равными значениям величины θ_{ij} вычисляемой согласно выражению

$$\theta_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{при } p_{ij} \geq 0,7; \\ 0, & \text{при } p_{ij} \leq 0,2; \\ p_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

3. Выполнить модификацию выходных значений передаточной функции для всех нейронов сети в соответствии с выражением (4), в котором значения y_{ij}^k определяются по формуле

$$y_{ij}^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^{k-1} + \lambda dy_{ij}^k, \quad (6)$$

где λ – коэффициент, характеризующий шаг изменения энергетической функции (3), что влияет на скорость сходимости итерационного процесса изменения состояний нейронов и, соответственно, на точность и время определения локального (глобального) экстремума;

dy_{ij}^k – значение изменения состояния нейронов сети на k -й итерации, определяемое согласно выражению

$$dy_{ij}^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (-y_{ij}^{k-1} + e_1 + e_2 + e_3), \quad (7)$$

где e_1, e_2, e_3 – значения, определяющие требования при минимизации функции энергии сети (3).

Здесь

$$e_1 = -\gamma_1 \left[\sum_{i=1}^m (w_{ij}^{k-1} - 1) \right]; j = \overline{1, n}; \quad (8)$$

выражение (8) учитывает требование не более одного средства назначения;

$$e_2 = -\gamma_2 \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (w_{ij}^{k-1} - m) \right]; \quad (9)$$

выражение (9) удовлетворяет требованию ровно m единиц в матрице;

$$e_3 = -\gamma_3 \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j p_{ij} w_{ij}^{k-1} \right]; \quad (10)$$

выражение (10) максимизирует целевую функцию (1);

4. Проверка состояния нейронов сети: если состояние нейронов сети не меняется и находится в области допустимых решений, то итерационный процесс в РНС завершается, иначе переход к шагу 3.

Зависимость функции энергии сети E от весовых коэффициентов нейронов w предлагаемого метода носит немонотонный характер. Это объясняется наличием множества локальных минимумов функции энергии сети. Из-за наличия многих локальных экстремумов и с увеличением сложности задачи РНС не всегда приходит в устойчивое состояние, и становится не возможным, получить решение за конечное число итераций. Для улучшения сходимости решения, в алгоритме предлагаемого нейросетевого метода на завершающих итерациях дополнительно выполняется расчет, при котором в активное состояние ($y_{ij} = 1$) устанавливается нейрон с наибольшим выходным значением в строке, а остальные нейроны делаются неактивными ($y_{ij} = 0$).

Условия проведения экспериментальных исследований

Для исследования нейросетевого метода решения рассматриваемой задачи была разработана и реализована в среде программирования Borland C++ Builder имитационная модель РНС (рис. 3).

В качестве примера применения РНС рассматривалось решение следующей задачи. Имеется восемь районов поиска ($n = 8$), в одном из которых находится цель. Априорная вероятность нахождения цели c_j в каждом j -м

районе равна единице ($c_1 = c_2 = \dots = c_8 = 1$). Требуется распределить десять разнородных поисковых единиц ($m = 10$) по районам так, чтобы полная вероятность обнаружения цели была максимальной. При этом каждая из

поисковых единиц должна обязательно назначаться на какой-либо из районов поиска.

Вероятности обнаружения цели p_{ij} различными поисковыми единицами в каждом из районов заданы матрицей (рис. 4).

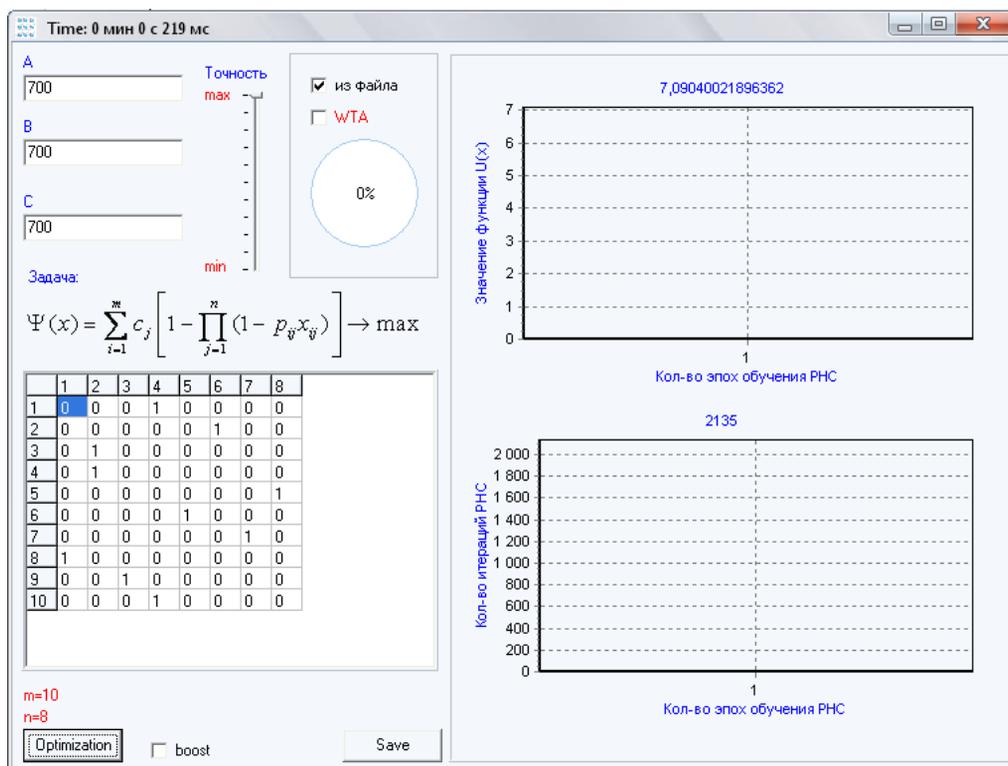


Рис. 3. Интерфейс программной реализации РНС матричной архитектуры

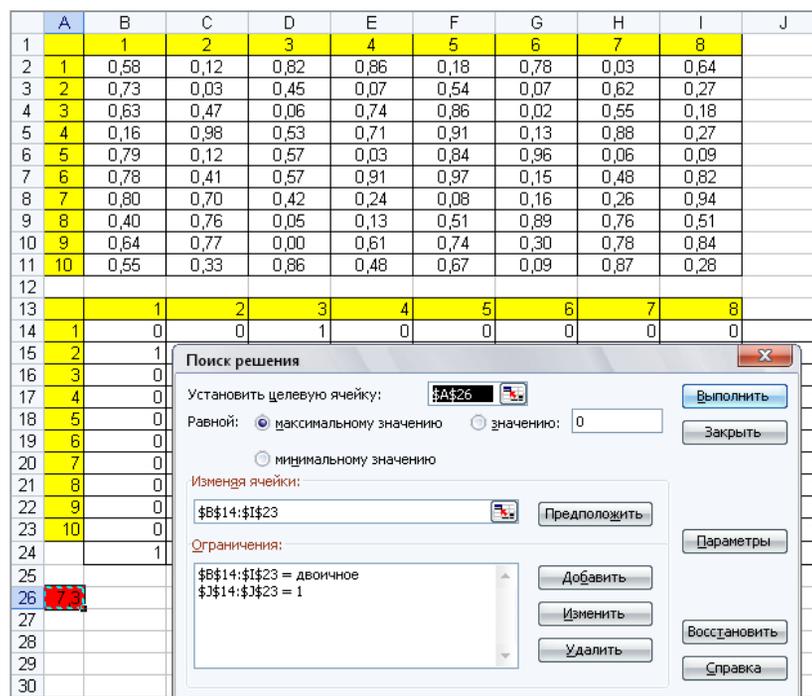


Рис. 4. Исходные данные и ограничения для поиска решения задачи комбинаторной оптимизации с помощью табличного процессора Microsoft Excel

На рисунке 4, в диапазоне ячеек [B_2, C_3, \dots, I_{11}] таблицы Microsoft Excel, записаны значения условной вероятности обнаружения цели p_{ij} i -ой поисковой единицей в j -м районе. В окне «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel (рис. 4) представлены максимизируемая целевая функция (1) и ограничения (2) задачи.

Оценка эффективности применения нейросетевого метода в задаче рационального распределения разнородных поисковых единиц

Оценка эффективности решения задачи предлагаемым нейросетевым методом выполнялась при различных исходных данных условной вероятности обнаружения p_{ij} ($p_{ij} \in [0 \div 1]$), а сложность задачи определялась размером 10×8 ($m \times n$). При этом параметры РНС, соответствующие размерности (сложности) задачи задавались в соответствии с таблицей 2.

В качестве показателей эффективности применения РНС использовались: средняя относительная ошибка Δ и время решения задачи t .

Показатель эффективности Δ РНС вычисляется согласно выражению

$$\Delta = \frac{U(\bar{x}) - U_t(\bar{x})}{U_t(\bar{x})} \cdot 100\%, \quad (11)$$

Таблица 2.

Параметры рекуррентной нейронной сети

Количество нейронов сети, шт.	80
Функция активации нейронов	Гипертангенс
Значение коэффициента функции активации нейронов u_0 [4]	0,02
Значения коэффициента скорости изменения состояния сети и точности вычислений сети λ	1×10^{-7}
Значения коэффициентов ограничений $\gamma_1 - \gamma_3$ функции энергии сети $E, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$	700

где $U(\bar{x})$ – расчетное значение целевой функции (1) от вектора параметров с помощью РНС;

$U_t(\bar{x})$ – точное (оптимальное) значение целевой функции (1) полученное от вектора параметров \bar{x} .

За точное решение принималось значение, полученное с помощью алгоритма нелинейной оптимизации средства «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel (рис. 4).

Результаты применения рассматриваемых методов для 14 первых реализаций случайно сгенерированных значений матриц условных вероятностей обнаружения p_{ij} представлены в табл. 3.

Анализ таблицы 3 показывает, что среднее время решения задачи для нейросетевого метода составило 245 мс, а для средства «Поиск

Таблица 3. Результаты решения задачи нелинейной оптимизации

№ реализации	Методы решения			
	Алгоритм нелинейной оптимизации средства «Поиск решения» табличного процессора Microsoft Excel		Нейросетевой метод на основе РНС матричной архитектуры	
	Показатели эффективности решения задачи			
	Время решения задачи t , мс	Максимальное значение целевой функции $U_t(x)$	Время решения задачи t , мс	Максимальное значение целевой функции $U(x)$
1	1150	7,1	204	7,13
2	1150	7,4	641	7,33
3	2300	6,8	78	7,01
4	2300	7,16	125	7,11
5	2300	7,35	125	7,31
6	2300	7,55	125	7,44
7	2300	7,1	156	7
8	2300	7,1	641	6,98
9	2300	6,96	187	7,11
10	3600	7,09	219	7,06
11	2300	7,04	157	7,01
12	2300	7,33	250	7,23
13	2300	7,15	125	7,1
14	3400	7,19	406	7,29

решения» табличного процессора Microsoft Excel – 2307 мс. Среднее значение целевой функции (1) для нейросетевого метода – 7,16, для метода нелинейной оптимизации приложения Microsoft Excel – 7,17.

Заключение

Таким образом, решение задачи целочисленного нелинейного программирования нейросетевым методом дает более быстрое решение. Его использование для задачи размерностью 10×8 позволило уменьшить время решения в 9,4 раза и обеспечить точность не менее чем 99,8% (с относительной ошибкой не более 0,2%). При этом, максимальная практически возможная ошибка ξ , допущенная с доверительной вероятностью 0,9 при определении средней ошибки решения, составила 7,7%. Как показывают расчеты, для уменьшения максимальной практической допущенной ошибки результатов исследования до 5% требуется число примеров (реализаций) увеличить, как минимум в 2,5 раза.

Сравнивая полученные результаты с результатами, приведенными в [3], можно сделать вывод, что использование предлагаемой РНС матричной архитектуры одинаково эффективно, как при решении задач целочисленного линейного программирования (комбинаторной оптимизации), так и целочисленного нелинейного программирования. Алгоритм

рассматриваемого нейросетевого метода слабо зависит от нелинейности целевой функции и функций системы ограничений. Это обусловлено дискретной формой выходного сигнала нейронов, получаемой посредством нелинейной функции их активации. В тоже время, существующие методы решения задач целочисленной нелинейной оптимизации обладают более значительной вычислительной сложностью перед задачами целочисленной линейной оптимизации. Так, в сравниваемых результатах, с требуемой для практики точностью, использование РНС позволило сократить время решения в 9,4 раза – для задачи нелинейной комбинаторной оптимизации со сложностью 10×8 , а для задачи линейной комбинаторной оптимизации в 11 раз, но уже для сложности 25×36 .

Следует также отметить, что динамика РНС состоит в многократном циклическом пересчете матрицы весовых коэффициентов и заданных ограничений сети, при котором к каждому элементу матрицы применяется одинаковый набор процедур. Все это дает возможность реализации параллелизма и ускорения вычислений РНС при обработке данных на ПЭВМ. Например, такие вычисления могут быть распараллелены на графическом процессоре с применением технологии CUDA [6]. По предварительной оценке это позволит дополнительно сократить время решения задачи от 10 до 30 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Способ динамической обработки данных при решении задачи комбинаторной оптимизации: пат. BY 21989 / А. А. Жук, В. М. Булойчик. – Оpubl. 13.03.2018.
2. **Жук, А. А.** Оптимизация распределения ресурсов посредством рекуррентной нейронной сети / А. А. Жук, В. М. Булойчик // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. – 2016. – № 2. – С. 62–70.
3. **Жук, А. А.** Эффективность решения задачи распределения ресурсов искусственной нейронной сетью / А. А. Жук, В. М. Булойчик // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. – 2018. – № 2. – С. 26–32.
4. **J. J. Hopfield, D. W. Tank.** «Neural» Computation of Decisions in Optimization Problems // Biological Cybernetics. – 1985. – № 52. – P. 141–152.
5. **Булойчик, В. М.** Решение транспортной задачи на электронной карте местности с помощью искусственных нейронных сетей / В. М. Булойчик, Д. М. Скрипко // Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ. – техн. наук. – 2007. – № 1. – С. 104–110.
6. **Сандерс, Дж.** Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров / Дж. Сандерс, Э. Кэндрот. – М.: ДМК Пресс, 2013. – 232 с.

REFERENCES

1. Spособ dinamicheskoi obrabotki dannyh pri reshenii zadachi kombinatornoj op-timizatsii: pat. BY 21989 / A. A. Zhuk, V. M. Bulochyk. – Opubl. 13.03.2018.
2. **Zhuk, A. A.** Optimizatsiya raspredeleniya resursov posredstvom rekurrentnoi neironnoi seti / A. A. Zhuk, V. M. Bulochyk // Vestn. Voen. akad. Resp. Belarus'. – 2016. – № 2. – S. 62–70.
3. **Zhuk, A. A.** Effektivnost' resheniya zadachi raspredeleniya resursov iskusstvennoi neironnoi set'yu / A. A. Zhuk, V. M. Bulochyk // Vestn. Voen. akad. Resp. Belarus'. – 2018. – № 2. – S. 26–32.

4. **J. J. Hopfield, D. W. Tank.** «Neural» Computation of Decisions in Optimization Problems // Biological Cybernetics.– 1985.– № 52.– P. 141–152.
5. **Buloichyk, V. M.** Reshenie transportnoi zadachi na elektronnoi karte mestnosti s pomosh'yu iskusstvennykh neironnykh setei / V. M. Buloichyk, D. M. Skripko // Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.– tehn. navuk.– 2007.– № 1.– S. 104–110.
6. **Sanders, Dzh.** Tehnologiya CUDA v primerah: vvedenie v programmirovaniye graficheskikh protsessorov / Dzh. Sanders, E. Kendrot.– M.: DMK Press, 2013.– 232 s.

Поступила
06.12.2020

После доработки
20.02.2021

Принята к печати
01.03.2021

ZHUK A. A., BULOICHYK V. M.

NEURAL NETWORK METHOD OF THE DECISION OF THE NONLINEAR PROBLEM OF OPTIMUM DISTRIBUTION OF THE NON-UNIFORM RESOURCE

Military academy Republic of Belarus

Given article is devoted features of the decision of a problem of integer nonlinear programming, by means of developed neural network method and algorithm of nonlinear optimization of means «decision Search» tabular processor Microsoft Excel. In offered neural network method the task in view decision is made by means of a recurrent neural network (RNN) matrix architecture with m neurons in each line and n neurons in each column. All neurons such network are connected with each other by communications, and the signal from an exit neuron can move on its input. Neural network method is characterized by that on inputs mentioned RNN the entrance vector of values of parameters of optimized nonlinear criterion function of a problem of distribution of a non-uniform resource moves, calculation of values of weight factors connected among themselves neurons is carried out and signal RNN is formed. This signal by means of nonlinear function will be transformed to the discrete target signal characterizing values quasi-optimal of the decision of the mentioned problem which size changes from 0 to 1. The estimation of efficiency of the decision of a considered problem was carried out at its various values of an indicator of efficiency on the basis of developed imitating model RNN. As indicators of efficiency of application offered neural network method were used – an average relative error and time of the decision of a problem. The value received by means of algorithm of nonlinear optimization of means was accepted to the exact decision «decision Search» tabular processor Microsoft Excel. The analysis of the received results of the experimental researches, offered neural network method, has allowed to make the conclusion that in comparison with an existing method of nonlinear optimization of tabular processor Microsoft Excel use offered neural network method allows essentially (in 9,4 times) to lower time of the decision of a problem dimension 10×8 ($m \times n$) and thus to provide accuracy of its decision not less than 99,8%.

Keywords: integer nonlinear programming, combinatory optimization, neural network optimization, quasi-optimal distribution, neural network method, a recurrent neural network, efficiency estimation.



Жук Андрей Александрович, доцент, кандидат технических наук, область научных интересов – системный анализ, методы математического программирования, методы и алгоритмы нейросетевой технологии обработки информации.

Zhuk A. A., PhD, associate professor, deputy head of the Department of Information and computing systems, Military academy Republic of Belarus.

E-mail: k210@tut.by.



Булойчик Василий Михайлович, профессор, доктор технических наук, основное направление научной деятельности – разработка специального математического и программного обеспечения для автоматизированных систем управления, компьютерных военных игр и тренажных систем; разработка методов нейросетевой обработки информации и их применение в системах военного назначения.

Buloichyk V. M., Doctor of technical sciences, professor, head of Research laboratory of modeling military actions, Military academy Republic of Belarus.

E-mail: vas-mih@tut.by.