

В. В. ЛЕГКОСТУП, В. Э. МАРКЕВИЧ

## УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ПРИ НАВЕДЕНИИ ПО РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Республика Беларусь

*Целью данной работы была выработка методики определения динамических свойств кинематической связи между измеряемыми параметрами движения объекта управления, выраженными в криволинейной системе координат и управляющими его движением ускорениями, выраженными в декартовой системе координат. Примерами криволинейных систем координат, встречающихся на практике являются: полярная, биангулярная, бицентрическая, эллиптическая, параболическая, цилиндрическая, сферическая, эллипсоидальная системы координат. Объектом исследования была выбрана эллиптическая система координат (ЭСК), позволяющая получить весьма простые соотношения между параметрами движения беспилотного летательного аппарата (БЛА) на плоскости и разностно-дальномерной навигационной информацией, получаемой на борту от двух навигационных станций. Полученная кинематическая связь требуется для последующей задачи синтеза контура управления объектом. Также описано последовательное упрощение полученной нелинейной кинематической связи и ее линеаризация для задачи синтеза системы наведения классическими линейными методами. Основное преимущество выбора эллиптической системы координат состоит в возможности осуществлять квазиоптимальное наведение объекта управления вдоль навигационной линии положения, каковой в данном случае является гипербола, что позволит уменьшить на одну количество навигационных позиций.*

**Ключевые слова:** эллиптическая система координат, коэффициенты Ламе, разностно-дальномерная система, навигация, кинематическая обратная связь, беспилотный летательный аппарат, БЛА.

### Введение

При синтезе систем автоматического регулирования возникает задача определения аналитической связи между управляющими воздействиями, формируемыми на борту объекта управления в связанной системе координат (СК), и оцениваемыми параметрами движения в криволинейной измерительной СК. При этом одним из основных требований является возможность описания указанной кинематической связи между перечисленными параметрами движения простым и естественным образом при использовании произвольных СК. Примерами криволинейных систем координат, встречающихся на практике, являются: полярная, биангулярная, бицентрическая, эллиптическая, параболическая, цилиндрическая, сферическая, эллипсоидальная системы координат.

Так как закон преобразования между криволинейными координатами всегда носит нелинейный характер, возникает проблема приведения всех используемых в процессе управления величин к одной СК, в которой будет реализован аналитический закон управления объектом. Причем, форма представления аналитической связи, полученной в результате координатных преобразований, должна обеспечивать возможность инженерного применения указанных соотношений на практике.

Примером может служить контур управления полетом БЛА по курсу, который ориентируется в пространстве по маякам, фактически используя для навигации угловые измерения. В таком случае оказывается, что силы, действующие на БЛА (главным образом – поперечные к продольной оси планера) наиболее просто и естественно выражаются

в декартовой СК (ДСК), а именно: продольная, боковая и вертикальная составляющие силы. В то же время измерительная информация, поступающая на вход контура управления, представлена в виде разности угловых координат, что естественным образом можно отобразить некоторым углом в одной из криволинейных СК – полярной, биангулярной, сферической или цилиндрической. При этом, для синтеза оптимального закона управления объектом необходимо получить аналитическое описание связи управляющих сил и измеряемых параметров движения.

Обычно такая связь выражается посредством системы нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений, которые впоследствии линейризуются и из которых с использованием метода замораживания коэффициентов удается получить передаточные функции данных связей для заданной области изменения параметров всей системы, которую в русскоязычной литературе по построению систем управления ракетами и летательными аппаратами также иногда называют кинематическим звеном [1, 11]. И если вопросу проектирования сил на оси полярной, сферической, цилиндрической систем координат посвящено достаточное количество литературы [2, 12], то для случая менее распространенных систем, таких как эллиптическая, параболическая и другие [3] этот вопрос в ряде важных для практики случаев вызывает затруднения.

### Кинематические уравнения движение объекта в эллиптической системе координат

Общую методику получения кинематической обратной связи можно представить в следующем виде:

- определение управляющей (исполнительной) и измерительной СК, в которых управляющему воздействию и измеряемой величине соответствуют свои координатные линии (плоскостной случай) или поверхности (пространственный случай);
- определение закона преобразования одной системы координат в другую;
- вычисление матрицы Якоби и коэффициентов Ламе данного преобразования;
- определение компонент вектора скорости в криволинейном пространстве;

- определение вектора ускорений в криволинейном пространстве;
- расчет проекций управляющих воздействий, выраженных в исходной СК, на оси локального базиса криволинейной СК.

В качестве примера получения кинематической связи рассмотрим движение БЛА на плоскости, навигация которого осуществляется по измерениям разности  $\Delta\tau$  времен распространения радиосигнала от двух навигационных точек  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  до БЛА (рис. 1):

$$\Delta\tau = \tau = \frac{1}{c_0}(d_0 - d_1), \quad (1)$$

где  $d_1, d_2$  – расстояния от БЛА до двух навигационных позиций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно.

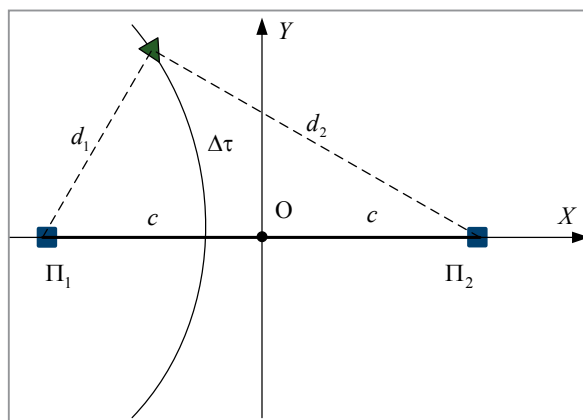


Рис. 1. Навигация БЛА в разностно-дальномерной навигационной системе

Фиксированной разности времен распространения радиосигнала  $\Delta\tau = \text{const}$  соответствует линия положения в виде гиперболы. Следовательно, естественным представляется выбор такой СК, в которой данная гипербола являлся бы одной из координатных линий, описывающей местоположение БЛА. Так как вторая координата не задана, ее следует доопределить. С точки зрения точности оценки местоположения БЛА целесообразно выбрать такие две координатных линии, являющихся линиями положения БЛА, чтобы угол между ними в пределах рабочей зоны стремился к  $90^\circ$ . Такой линией по отношению к гиперболе будет являться эллипс. Взаимно ортогональные координатные линии в виде софокусных гипербол и эллипсов образуют так называемую эллиптическую СК [3] (рис. 2).

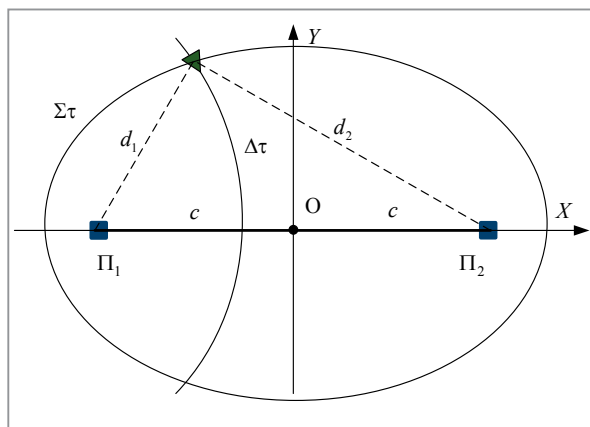


Рис. 2. Положение БЛА в эллиптической системе координат

Вторая координата  $\Sigma\tau$  в выбранной системе координат (рис. 2) задает линию положения в виде эллипса, которая, по своей сути, является суммой  $d_1 + d_2$  времен распространения радиосигнала от навигационных позиций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  до БЛА.

Попытаемся установить связь между параметрами движения БЛА в эллиптической системе координат и действующими на БЛА тангенциальным  $W_T$  и нормальным  $W_n$  (по отношению к вектору скорости  $\mathbf{V}$ ) ускорениями, выраженными в декартовой системе координат (рис. 3).

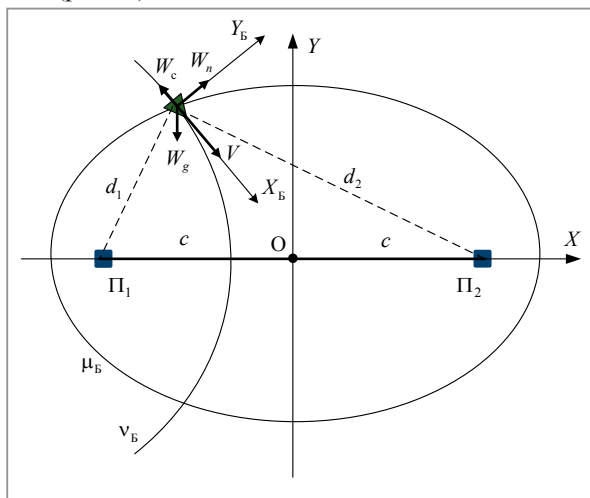


Рис. 3. Ускорения, действующие на БЛА, выраженные в декартовой системе координат

Необходимо отметить, что вектор силы или ускорения принято рассматривать как ковариантный вектор [2–5], то есть заданный через проекции на нормали к координатным поверхностям. Такие нормали образуют

локальный базис дуального пространства. В то же время координаты точки и вектор скорости принято рассматривать через контравариантные координаты, являющиеся проекциями на касательные к координатным линиям. В ортогональных системах координат, к которым относится и эллиптическая система, ковариантные и контравариантные координаты совпадают.

### Результаты и их обсуждение

Известно, что декартовы координаты точки выражаются через эллиптические уравнениями [3]

$$\begin{cases} x = c \cosh \mu \cos v, \\ y = c \sinh \mu \sin v, \end{cases} \quad (2)$$

где  $c$  — полубаза или фокальное расстояние;  $\mu$  — относительная координата, задающая эллипс положения;

$v$  — относительная координата, задающая гиперболу положения.

Связь между измеряемой задержкой  $\Delta\tau$  и координатой  $v$  выражается нелинейным соотношением

$$\Delta\tau = \cos v. \quad (3)$$

Траектория движения БЛА вдоль одной из гипербол положения в эллиптической системе координат, соответствующей выражениям приведена на рис. 4. Штриховыми линиями обозначены эллипсы (при  $\mu = \text{const}$ ) и гиперболы (при  $v = \text{const}$ ) положения. Кинематика движения тела определяется уравнением Лагранжа [6, 7], которое связывает между собой контравариантные координаты  $q_i$  и скорости  $\dot{q}_i$  тела и ковариантные координаты  $W_i$  действующих ускорений:

$$\frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = W_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $T = V^2/2$  — кинетическая энергия материальной точки (точки единичной массы);

$W_i$  — проекция ускорения на  $i$ -й орт локального базиса;

$H_i$  — коэффициент Ламе, соответствующий  $i$ -му орту локального базиса;

$n$  — количество степеней свободы.

После того, как заданы уравнения преобразования, необходимо составить матрицу Якоби и определить коэффициенты Ламе [2]. Матрица Якоби преобразования (2) имеет вид

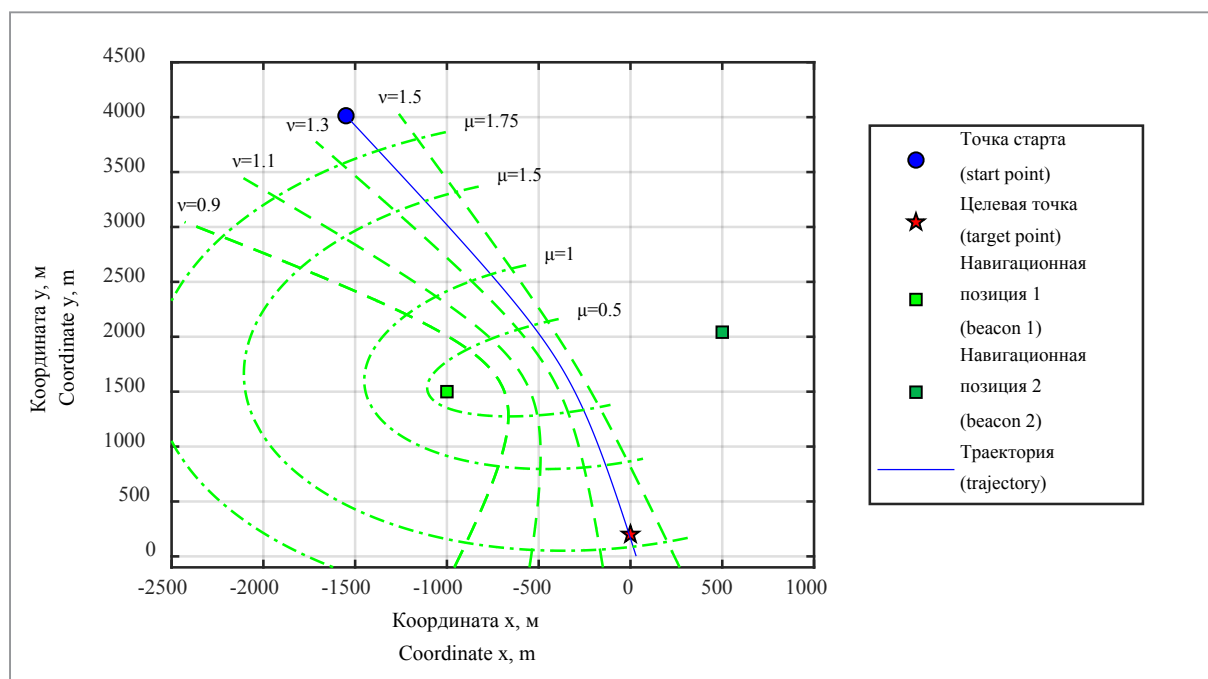


Рис. 4. Траектория движения БЛА вдоль некоторой опорной гиперболы к целевой точке в эллиптической системе координат

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \operatorname{sh} \mu \cos \nu & c \operatorname{ch} \mu \sin \nu \\ -c \operatorname{ch} \mu \sin \nu & c \operatorname{sh} \mu \cos \nu \end{bmatrix}, \quad (5)$$

а коэффициенты Ламе:

$$H_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2} = \frac{c \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu}}{\sqrt{2}}, \quad (6)$$

$$H_\nu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2} = \frac{c \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2\nu}}{\sqrt{2}},$$

где  $H_\mu$  – коэффициент Ламе, соответствующий орту  $\mathbf{e}_\mu$ ;

$H_\nu$  – коэффициент Ламе, соответствующий орту  $\mathbf{e}_\nu$ .

Из выражения видно, что коэффициенты Ламе равны между собой, а сама система координат является ортогональной, что подтверждается диагональным видом матрицы метрического тензора [8]:

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{2} (\cosh 2\mu + \cos 2\nu) & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{2} (\cosh 2\mu + \cos 2\nu) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Квадрат вектора скорости БЛА в эллиптической системе координат определяется как сумма квадратов произведений коэффициентов Ламе на соответствующие скорости

$$V^2 = (H_\mu \dot{\mu})^2 + (H_\nu \dot{\nu})^2 = \frac{c^2}{2} [\dot{\mu}^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\nu) + \dot{\nu}^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\nu)] \quad (8)$$

Ортогональные проекции ускорения боеприпаса на орты локального базиса эллиптической системы координат определяются в

соответствии с выражением (4).

Найдем частные производные от кинетической энергии точки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \mu} &= \frac{c^2}{2} \sinh 2\mu (\dot{\mu}^2 + \dot{v}^2), & \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} &= \frac{c^2}{2} \dot{\mu} (\cosh 2\mu - \cos 2v), \\ \frac{\partial T}{\partial v} &= \frac{c^2}{2} \sin 2v (\dot{\mu}^2 + \dot{v}^2), & \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} &= \frac{c^2}{2} \dot{v} (\cosh 2\mu - \cos 2v),\end{aligned}\quad (9)$$

Подставляя их в выражение (4) получаем

$$\begin{aligned}W_v &= \frac{c(2\dot{\mu}\dot{v}\sin 2v + (\dot{\mu}^2 - \dot{v}^2)\operatorname{sh} 2\mu + \ddot{\mu}(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2v))}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2v}}, \\ W_\mu &= \frac{c(2\dot{\mu}\dot{v}\operatorname{sh} 2\mu + (\dot{v}^2 - \dot{\mu}^2)\sin 2v + \ddot{v}(\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2v))}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu - \cos 2v}},\end{aligned}\quad (10)$$

где  $W_\mu$  – проекция ускорения на орт локального базиса эллиптической системы координат, соответствующий координате  $\mu$ ;

$W_v$  – проекция ускорения на орт локального базиса эллиптической системы координат, соответствующий координате  $v$ ;

Связь проекций ускорения на орты локального базиса эллиптической системы координат, в которой рассматривается движение БЛА и проекций ускорения на оси декартовой системы (рис. 5) можно задать матричным выражением [9]

$$\begin{pmatrix} W_\mu \\ W_v \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} W_n \\ W_T \end{pmatrix}; \quad (11)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $W_n, W_T$  – нормальная и тангенциальная проекции ускорения БЛА;

$\alpha = \theta - \chi$  – угол между вектором скорости БЛА и ортом  $e_v$ ;

$\theta$  – угол наклона вектора скорости БЛА;

$\chi$  – угол наклона касательной к гиперболе в точке местоположения БЛА.

Для задачи навигации БЛА вдоль заданной гиперболы интерес представляет выражение для  $W_\mu$ , которое является управляющим воздействием для координаты (канала управления)  $v_B$  БЛА. Однако это выражение сложно

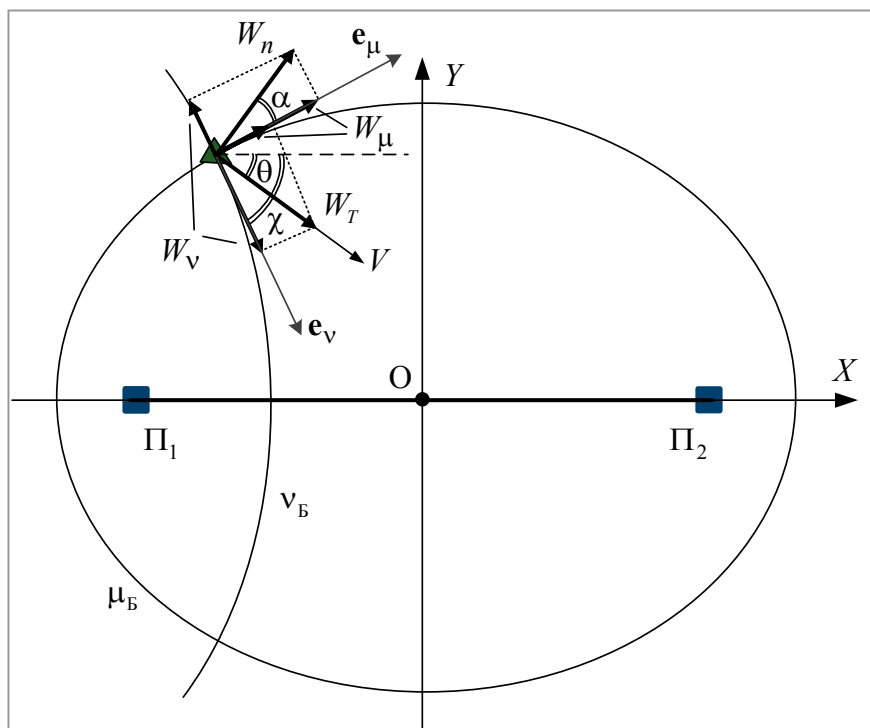


Рис. 5. Проекция ускорений, выраженных в декартовой системе координат на орты локального базиса эллиптической системы координат

поддается анализу и дальнейшему синтезу на его основе оптимального регулятора из-за наличия полиномиальных, тригонометрических и гиперболических нелинейностей, а также межканальных нелинейных связей.

Поэтому выполним упрощение данного выражения. Для задачи навигации за пределами линии базы ( $\mu > 1$ ) можно полагать, что  $\operatorname{ch} 2\mu \gg \cos 2\nu$  и, таким образом, членами с множителем  $\cos 2\nu$  можно пренебречь. Тогда второе выражение в примет вид

$$W_\mu = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu}} \times (2\dot{\mu}\dot{\nu} \operatorname{sh} 2\mu + (\dot{\nu}^2 - \dot{\mu}^2) \sin 2\nu + \ddot{\nu} \operatorname{ch} 2\mu). \quad (13)$$

Кроме того, квадрат гиперболической скорости  $\dot{\nu}^2$  для скоростных объектов при их движении вдоль заданной гиперболы незначителен по сравнению с квадратом эллиптической скорости  $\dot{\mu}^2$ , и имеет максимум при движении в районе линии базы. Исключение составляют случаи неуправляемого произвольного по отношению к навигационной системе движения, когда проекция вектора скорости БЛА на орт  $\mathbf{e}_\mu$  сопоставима или превышает его проекцию на орт  $\mathbf{e}_\nu$ . Пренебрегая величиной  $\dot{\nu}^2$  в (13), получаем выражение

$$W_\mu = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu}} \times (2\dot{\mu}\dot{\nu} \operatorname{sh} 2\mu - \dot{\mu}^2 \sin 2\nu + \ddot{\nu} \operatorname{ch} 2\mu). \quad (14)$$

Данное выражение весьма точно описывает траекторию движения БЛА в соответствии с действующими на него ускорениями. Однако по причине присущей нелинейности вида  $\sin 2\nu$  невозможно оценить приблизительный вид передаточной функции кинематической связи или синтезировать линейный контур управления, что вынуждает либо использовать методы синтеза нелинейных регуляторов, либо методы линеаризации кинематической связи (14), такие как разложение в ряд Тейлора с отбрасыванием нелинейных членов или, например, метод линеаризации обратной связью [10]. При использовании линеаризации разложением в ряд Тейлора получим следующее выражение:

$$W_\mu = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu}} \times (2\dot{\mu}\dot{\nu} \operatorname{sh} 2\mu - \dot{\mu}^2 (a_{\text{лин}} \nu + b_{\text{лин}}) + \ddot{\nu} \operatorname{ch} 2\mu), \quad (15)$$

где  $a_{\text{лин}}, b_{\text{лин}}$  – коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины  $\sin 2\nu$ .

Однако необходимо отметить, что выражения (14) и (15) имеют в составе слагаемое с  $\nu$ , способное привести к статической ошибке в случае неточного определения величины  $\dot{\mu}^2$ . При синтезе методов наведения стремятся получить такую кинематическую траекторию объекта управления, которая обладала бы наименьшей кривизной с целью минимизации как динамической ошибки, возникающей при движении по кривой, так и минимальных затрат энергии на управление [11]. Поэтому наведение целесообразно осуществлять вдоль гипербола, лежащих в окрестности  $\nu = \frac{\pi}{2}$ , что соответствует гиперболе нулевой кривизны. В таком случае член с  $\sin 2\nu$  в (14) будет близок к нулю и им можно также пренебречь. В результате получится линейное дифференциальное уравнение второго порядка по отношению к величине  $\nu$  с переменными коэффициентами:

$$W_\mu = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu}} (2\dot{\mu}\dot{\nu} \operatorname{sh} 2\mu + \ddot{\nu} \operatorname{ch} 2\mu). \quad (16)$$

Разрешая выражение (16) относительно старшей производной получаем

$$\ddot{\nu} = \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\operatorname{ch} 2\mu}} W_\mu - 2\dot{\mu}\dot{\nu} \tanh 2\mu. \quad (17)$$

Сравнительный анализ выражений (10) и (16) приведен на рис. 6. Приведенные графики показывают достаточную степень схождения исходной и упрощенной кинематических связей.

На рис. 6 представлены траектории движения БЛА вдоль гиперболы  $\nu_0 = 1.5$  в направлении линии базы со скоростью 100 м/с ( $\dot{\mu} = 0,03 \dots 0,05$ ) с использованием полной нелинейной и линеаризованной кинематических связей для случаев: а)  $\mu = 1, W_\mu = 0$ ; б)  $\mu = 1, W_\mu = 50$ ; в)  $\mu = 3, W_\mu = 0$ ; г)  $\mu = 3, W_\mu = 50$ . Нормальное к гиперболе положения ускорение  $W_\mu$  подается в момент времени  $t = 10$ .

При движении БЛА вдоль гиперболы с постоянной скоростью 100 м/с для эллиптической дальности  $\mu > 1$  получим среднюю оценку скорости  $\dot{\mu} \approx 0,04$ . Учитывая, что коэффициенты  $\mu, \dot{\mu}$  меняются медленно по сравнению с динамическими переменными  $\nu, \dot{\nu}$ , получим передаточную функцию для выражения (17), используя принцип замороженных коэффициентов [1] и преобразование Лапласа.



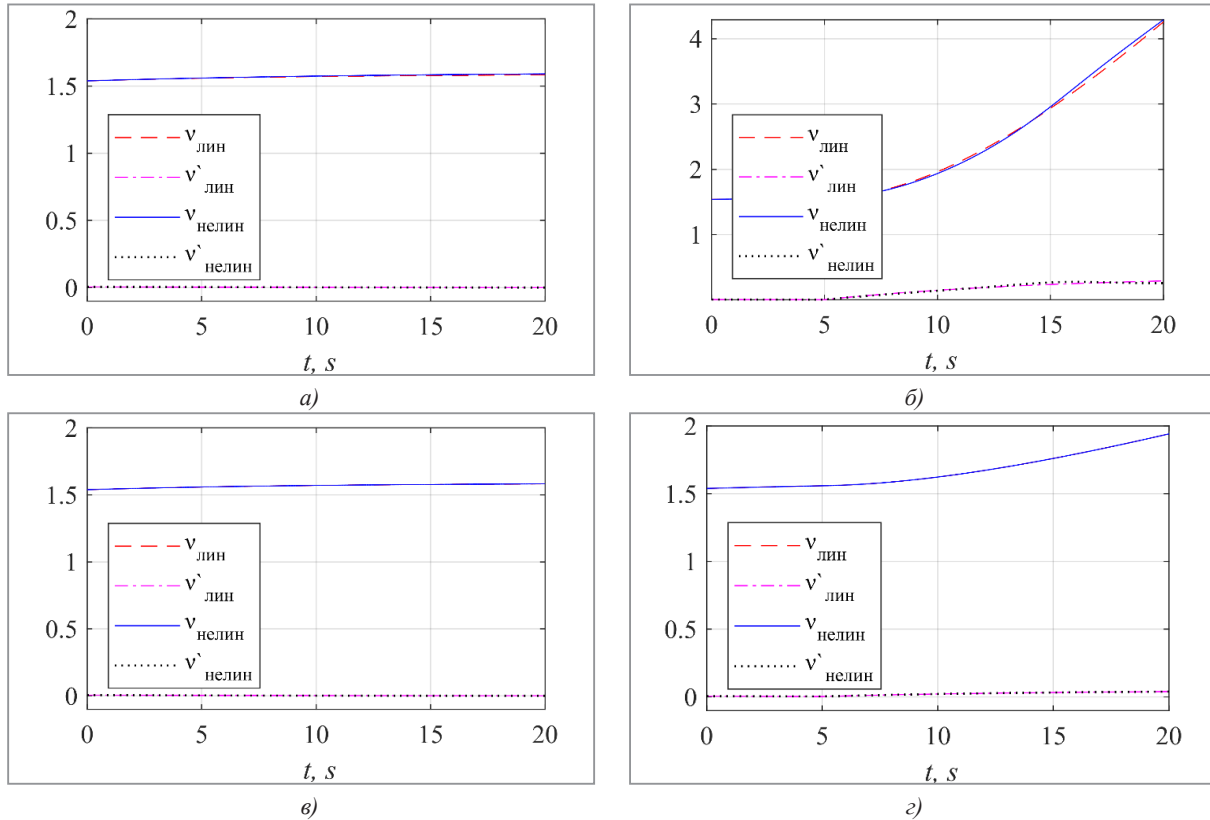


Рис. 6. Графики сравнения динамики исходной нелинейной ( $v_{\text{нелин}}, \dot{v}_{\text{нелин}}$ ) и линеаризованной кинематических связей ( $v_{\text{лин}}, \dot{v}_{\text{лин}}$ ).

Передаточная функция от входного управляющего ускорения  $W_{\mu}$  до выходной координаты  $v$ :

$$\frac{v(s)}{W_{\mu}(s)} = \frac{1}{\sqrt{2} c \dot{\mu} \frac{\text{sh } 2\mu}{\text{ch } 2\mu} s \left( 1 + \frac{1}{2\dot{\mu} \tanh 2\mu} s \right)}, \quad (18)$$

где  $s$  – оператор Лапласа.

Как можно видеть, выражение (18) представляет собой последовательно соединенные интегрирующее и апериодическое звенья:

$$\frac{v(s)}{W_{\mu}(s)} = \frac{K_{\mu}}{s(1 + T_{\mu}s)}, \quad (19)$$

где  $K_{\mu} = \frac{\sqrt{\text{ch } 2\mu}}{\sqrt{2} c \dot{\mu} \text{sh } 2\mu} = \frac{\sqrt{2} T_{\mu}}{c \sqrt{\text{ch } 2\mu}}$  – коэффициент усиления;

$T_{\mu} = 1/(2\dot{\mu} \tanh 2\mu)$  – постоянная времени апериодического звена.

Такая же комбинация звеньев представляет кинематическую связь в задачах телеуправления БЛА в виде [1]:

$$\frac{\varepsilon(s)}{W_{\pi}(s)} = \frac{1}{2\dot{r}s \left( \frac{r}{2\dot{r}} s + 1 \right)}, \quad (20)$$

где  $\varepsilon$  – угол наклона линии визирования БЛА с пункта наведения;

$W_{\pi}$  – проекция полного ускорения БЛА на перпендикуляр к линии визирования;

$r$  – дальность между пунктом наведения и БЛА;

$\dot{r}$  – скорость изменения дальности.

Дальнейшее упрощение выражения может быть основано на анализе постоянной времени апериодического звена. Если  $T_{\mu} \gg 1$  и ширина полосы пропускания апериодического звена оказывается существенно ниже ширины полосы рабочих частот всей системы, то апериодическое звено эквивалентно интегратору и выражение (20) записать как

$$\frac{v(s)}{W_{\mu}(s)} = c \sqrt{\frac{2}{\text{ch } 2\mu}} \frac{1}{s^2}, \quad (21)$$

которое является двойным интегрирующим звеном с коэффициентом передачи

$$k = c \sqrt{\frac{2}{\text{ch } 2\mu}}.$$

### Заключение

Знание модели объекта управления, в том числе и всех присутствующих кинематических связей является необходимым условием для синтеза оптимального устройства управления. В данной работе были получены полная нелинейная и линеаризованная модели кинематической связи между управляющими полетом БЛА ускорениями и его координатами

в эллиптической системе координат. Проведенное компьютерное моделирование показало определенную схожесть двух моделей кинематической связи. Использование упрощенной линейной модели позволяет синтезировать контур управления БЛА линейными методами, развитыми в наибольшей степени в теории систем автоматического регулирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Е. В. Проектирование систем телеуправления. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 200. 272с.
2. Алферов Г. В. Методическое пособие. Механика в криволинейных координатах. Санкт-Петербург 2006.
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970.
4. Рашевский. П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М. – Л.: Гостехиздат, 1953. – 635 с.
5. Позняк Э. Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – Москва: Мир, 1990. – 719 с.
6. Вильке В. Г. Теоретическая механика: учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Г. Вильке. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 311 с
7. Погорелов Д. Ю. Введение в моделирование динамики систем тел. Брянск: БГТУ. 1997. 156с.
8. Itskov M. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics. Springer, 2009.
9. Bowen R. M., and Wang C.-C. Introduction to Vectors and Tensors, Springer, New York, 1976.
10. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.
11. Кун А. А., Лукьянов В. Ф., Шабан С. А. Основы построения систем управления ракетами. В 3-х ч. – Минск: Издание академии, 2001, 131с.
12. Ханукаев Ю. И. Введение в теоретическую механику: учебное пособие / Ю. И. Ханукаев. – М.: МФТИ, 2017. – 240 с.

### REFERENCES

1. Khanukayev Yu. I. Vvedeniye v teoreticheskuyu mekhaniku: uchebnoye posobiye / YU. I. Khanukayev. – М.: МФТИ, 2017. – 240 s.
2. Alferov G. V. Metodicheskoye posobiye. Mekhanika v krivolineynykh koordinatakh. Sankt – Peterburg 2006
3. Korn G. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov / G. Korn, T. Korn. – М.: Nauka, 1970.
4. Rashevskiy. P. K. Rimanova geometriya i tenzornyy analiz. – М. – Л.: Gostekhizdat, 1953. – 635 s.
5. Poznyak E. G. Differentsial'naya geometriya: pervoye znakomstvo / E. G. Poznyak, Ye. V. Shikin. – Moskva: Mir, 1990. – 719 с.
6. Vil'ke V. G. Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata / V. G. Vil'ke. – 4-ye izd., pererab. i dop. – М.: Izdatel'stvo Yurayt, 2016. – 311 s
7. Pogorelov D. Yu. Vvedeniye v modelirovaniye dinamiki sistem tel. Bryansk: BGTU. 1997. 156s.
8. Itskov M. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics. Springer, 2009.
9. Bowen R. M., and Wang C.-C. Introduction to Vectors and Tensors, Springer, New York, 1976.
10. Kim D. P. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernyye, nelineynyye, optimal'nyye i adaptivnyye sistemy: Ucheb. posobiye. – М.: FIZMATLIT, 2004. – 464 s.
11. Kun A. A., Luk'yanov V. F., Shaban S. A. Osnovy postroyeniya sistem upravleniya raketami. V 3-kh ch. – Minsk: Izdaniye akademii, 2001, 131s.
12. Orlov Ye. V. Proyektirovaniye sistem teleupravleniya. – Izhevsk: Izdatel'skiy dom «Udmurtskiy universitet», 200. 272s.

Поступила  
01.02.2021

После доработки  
01.03.2021

Принята к печати  
01.03.2021

LEGKOSTUP V. V., MARKEVICH V. E.

## METHODOLOGY OF DETERMINING OF THE TRANSFER FUNCTION OF ENGAGEMENT KINEMATICS OF ACCELERATIONS OF AN AIRCRAFT AND ITS ELLIPTIC COORDINATES USED FOR THE GUIDANCE BASED ON TIME DIFFERENCE OF ARRIVAL

JSC «ALEVKURP» (Minsk, Republic of Belarus)



*This paper discusses the problem of determining a kinematics (in terms of transfer function, as far as possible) of parameters of the motion of an aircraft expressed in the curvilinear coordinate system and control accelerations expressed in a rectangular coordinate system. Examples of curvilinear coordinate systems using in practice can be polar, biangular, two-center bipolar, elliptic, parabolic cylindrical, spherical, ellipsoidal, coordinate systems. A technique for obtaining a kinematic link for the control problem of an unmanned aerial vehicle in the elliptic coordinate system was described. It allowed to obtain simpler view of the kinematic link which could provide navigation an aircraft along the hyperbola deriving from the time difference of arrival navigation system. It can. As a result, it is possible to reduce the number of the navigation radio beacons.*

**Keywords:** curvilinear coordinate system, Lamé coefficients, navigation, kinematics of navigation and guidance, UAV, TDoA.



**Легкоступ Виктор Валерьевич** – магистр технических наук, научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП».

**Legkostup Victor Valeryevich** – stuff researcher, JSC “ALEVKURP”.

E-mail: legkostupvv@gmail.com



**Маркевич Виталий Эдмундович** – кандидат технических наук, зам. директора ООО «Научно-производственное объединение САМЕРА».

**Markevich Vitaliy Edmundovich** – PhD, deputy director of LLC “SAMERA”.

E-mail: mark.vit@tut.by.