УДК 517.5

В. М. РОМАНЧАК, М. А. ГУНДИНА

СТАНДАРТНЫЙ И СИНГУЛЯРНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

Белорусский национальный технический университет

Аннотация. В работе сформулировано предположение, что при анализе периодического сигнала применение классических вейвлетов может носить вспомогательный характер. Это объясняется тем, что интуитивная интерпретация вейвлет-преобразования не является очевидной. Предлагается основным инструментом в прикладных исследованиях периодических сигналов считать преобразование Фурье. Приводится пример, подтверждающий данную точку зрения. Для выделения периодической составляющей сигнала наряду с вейвлет-анализом предлагается проводить спектральный анализ. Для этого выполняется предварительная фильтрация с использованием сингулярных вейвлеты. Такой подход может существенно дополнить классический вейвлет-анализ.

Ключевые слова: *Вейвлет-анализ, сингулярный вейвлет, количество солнечных пятен, Wolfram Mathematica.*

Введение

Анализ сигнала производят путем разложения исходного сигнала на более простые составляющие. Сигнал может быть выражен в виде суммы синусоид. Каждая синусоида характеризуется частотой, начальной фазой, амплитудой [1]. Достоинством такого разложения является возможность придать физический и геометрический смысл полученным результатам. Например, нота в музыке является синусоидой с определённой частотой и амплитудой. Синусоиду можно изобразить графически.

В настоящее время популярной темой многих научных и инженерных исследований стали вейвлеты. Известно, что вейвлет – это класс особых функций, определенных с точностью до масштаба и сдвига. Одно из первых упоминаний о вейвлетах появилось в литературе по цифровой обработке и анализу сейсмических сигналов в работах А. Гроссмана и Ж. Морле [2–4]. Такие вейвлеты напоминают по форме затухающую синусоиду и в данной работе называются стандартными. Вейвлет-преобразование разбивает множество данных на составляющие с разными масштабами и сдвигами. При этом теряется возможность простой интерпретации полученных результатов.

Сингулярные вейвлеты впервые рассматривались в работах [5–7]. Сингулярные вейвлеты по форме напоминают дельта-образную функцию. С помощью сингулярных вейвлетов может быть решена задача сглаживания экспериментальных данных. Целью работы является изучение возможности фильтрации сигнала с помощью сингулярных вейвлетов.

С физической точки зрения цифровая фильтрация – это выделение в определенном частотном диапазоне с помощью цифровых методов полезного сигнала на фоне мешающих помех. В работе сформулировано предположение, что при анализе периодического сигнала применение классических вейвлетов может носить вспомогательный характер. Основным инструментом в прикладных исследованиях такого характера остается преобразование Фурье. В этом случае сохраняется возможность естественной интерпретации результатов исследования. Чтобы убрать из сигнала высокочастотный шум и непериодическую составляющую предлагается применять сингулярные вейвлеты.

Преобразование Фурье

Процесс преобразования сигналов называется фильтрацией. Фильтрацию можно осуществить с помощью ряда Фурье и вейвлет-преобразования. Математической основой спектрального анализа Фурье является преобразование Фурье и ряды Фурье.

Преобразование Фурье является скалярным произведение функции $f(x)$ и комплексной экспоненты $\exp(i\lambda x)$, где λ – частота колебаний. Преобразование Фурье является функцией частоты λ и задается следующей формулой:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\lambda} dx .$$

Аппарат Фурье-преобразований дает достаточно простые для расчетов формулы и прозрачную интерпретацию результатов, но не лишен и некоторых недостатков. Чтобы применять спектральный анализ Фурье желательно сигнал представить в виде суммы периодической, случайной и трендовой компоненты [8].

Вейвлет-преобразование

Подобно тому, как в основе аппарата преобразований Фурье лежит единственная функция, так и вейвлет-преобразование строится на основе единственной базисной функции $\psi(x)$. Например, вейвлет Морле имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2} \cos\left(\pi x \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}}\right).$$

На рис. 1 представлен график вейвлета Морле.

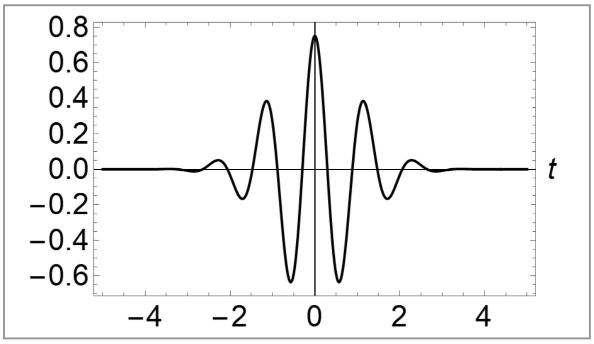


Рис. 1. График вейвлета Морле $\psi(t,a,0)$

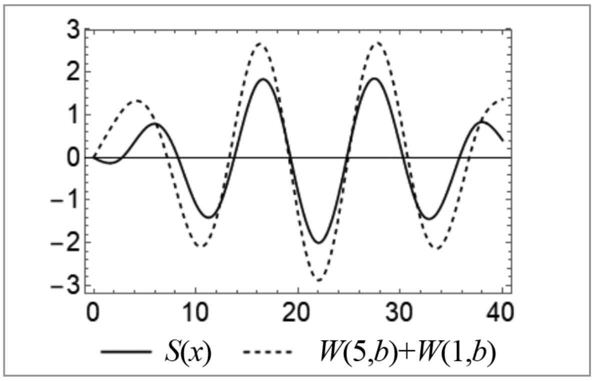
Вейвлет-преобразование строится с помощью вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями масштабного коэффициента a и параметра сдвига b:

$$W(f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt .$$

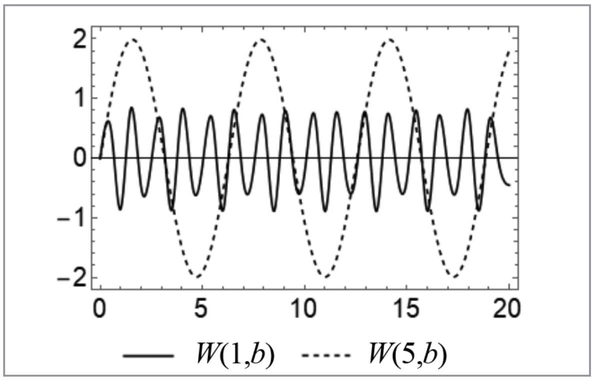
Традиционно считается, что вейвлет-преобразование является хорошей альтернативой преобразованию Фурье. С помощью вейвлет-преобразования можно найти низкочастотные и высокочастотные характеристики сигнала. Иногда вейвлет-анализ сравнивают с «математическим микроскопом», который позволяет проанализировать сложный сигнал. Вейвлеты широко используются в самых различных областях знаний [2–4]. Но некоторые специалисты считают, что публикации по вейвлетам в прикладных исследованиях имеют низкую информационную ценность, в работах отсутствует статистическое обоснование результатов и выводов [8–9]. И для определенного класса задач такое мнение можно считать верным. Возможное объяснение состоит в том, что фундаментальная теория вейвлет-анализа столкнулась с трудностями, которые, насколько нам известно, не нашли отражения в теоретических работах посвященных вейвлетам. Трудности обусловлены тем, что в прикладных исследованиях интерпретация результатов вейвлет-анализа, в отличие от анализа Фурье, является сложной проблемой [10]. Поэтому в данной работе предлагается алгоритм обработки экспериментальных данных, результаты которого сводятся к анализу Фурье. Алгоритм состоит из двух частей. Вначале осуществляется предварительная фильтрация сигнала. Далее отфильтрованный сигнал анализируется с применением спектрального анализа Фурье. Для решения первой задачи применяются сингулярные вейвлеты, которые позволяют избежать амплитудных искажений сигнала. Теперь поясним почему сложно понять и почему ошибочна интерпретация вейвлет-преобразования как аналога и альтернативы для спектрального анализа методом преобразования Фурье.

Недостатки классических вейвлетов

Преобразование Фурье является проекцией функции $f(x)$ на комплексные экспоненты $\exp(i\lambda x)$, где λ – частота колебаний. Спектр Фурье допускает простую физическую интерпретацию. Чем модуль коэффициента Фурье больше, тем амплитуда колебаний больше. Аналогично коэффициент вейвлет-преобразования $W(a, b)$ является проекцией сигнала на базисный вейвлет. Чем коэффициент больше, тем ближе сигнал напоминает по форме вейвлет. Таким образом вейвлет-преобразование и преобразование Фурье имеют общую математическую основу. Однако нельзя рассматривать вейвлет преобразование как аналог спектрального анализа. Это означает, что нельзя объяснять вейвлет-преобразование в терминах анализа Фурье. Например, выполним вейвлет-преобразование для сигнала $S(x) = \sin(x) + \sin(5x)$, используя вейвлет Морле. Из рис. 2 следует, что вейвлет-преобразование позволяет правильно оценить наличие периодических составляющих в анализируемом сигнале. Но неспециалисту трудно понять, почему амплитуды сигналов на рис. 2 значительно отличаются. Поэтому ошибочно считать, что «вейвлет-спектрограммы намного более информативны, чем обычные фурье-спектрограммы» [4]. Этот пример подтверждает, что существенным недостатком вейвлет-преобразования является сложная интерпретация получаемых численных значений. Кроме того, результаты использования вейвлетов различного масштаба и частоты плохо сопоставимы между собой из-за неконтролируемого изменения частотных и амплитудных характеристик сигнала. Чтобы уточнить результаты вейвлет-анализа в некоторых случаях можно дополнительно провести спектральный анализ сигнала. Для этого предлагается выполнить предварительную фильтрацию сигнала, используя сингулярные вейвлеты.



а



б

Рис. 2. Графическое представление сигнала
а – исходный и обработанный сигнал,
б – $W(1, b)$, $W(5, b)$

Сингулярные вейвлеты

Пусть существует среднее значение вейвлета на числовой оси:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt \,, |C_\psi| < \infty$$

Для классического вейвлета считается, что для базисного вейвлета должно выполняться условие допустимости: среднее значение вейвлета должно равняться нулю: $C_\psi = 0$. Для сингулярного вейвлета удобно считать, что среднее значение равно единице: $C_\psi = 1$. Например, в качестве базисного вейвлета $\psi(t)$ можно использовать дельта-образную функцию нормального распределения. График такого вейвлета представлен на рис. 3.

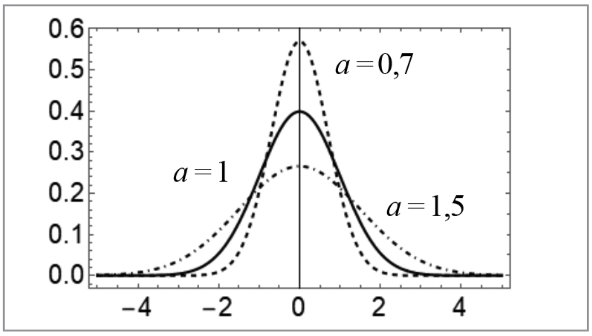


Рис. 3. График вейвлета Гаусса
$\psi(t;0,7;0)$, $\psi(t;1;0)$, $\psi(t;1,5;0)$

Пусть $\psi(t)$ – сингулярный вейвлет. Для функции $f(x)$ справедливо следующее вейвлет-разложение [5]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K} WF_k(x, a_k) + F_{K+1}(x), \qquad (1)$$

где $a_k = \alpha 2^{-k}$, α – постоянная: дискретное вейвлет-преобразование $WF^k(x, a_k)$ вычисляется по формуле:

$$WF_k(x, a_k) = \frac{\sum_i F_{k,i} \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)}{\sum_i \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)}.$$

причем коэффициенты вейвлет-преобразований находятся по схеме:

$$F_{k+1,j} = F_{k,j} - WF_k(x_j, a_k)\,,$$

$F_{0,j} = f(x_j)$; $j = 1, \ldots, n$; k – порядковый номер вейвлет-преобразования, $k = 0, 1, 2, \ldots, K$, $K \geq 1$; K – порядок приближения; $F_{K+1}(x)$ – остаточный член (погрешность аппроксимации); $f(x_i)$ – заданные дискретные значения. В сумме (1) участвуют слагаемые с последовательно уменьшающимися значениями масштаба a_k. *Для спектрального анализа из суммы (*1) можно отбросить слагаемые с очень малыми и большими значениями масштаба. С этой целью будем рассматривать функцию:

$$S(x,m,n) = \sum_{k=m}^{n} WF^k(x,a_k)\,, \qquad (2)$$

где $a_k = \alpha 2^{-k}$, α – постоянная; m, n – целые числа, для которых выполняется неравенство $K \geq n \geq m > 0$. Функция (2) фактически служит фильтром, который позволяет в некоторых случаях выполнить полосовую фильтрацию.

Пример. Покажем, как предлагаемый алгоритм может служить дополнением к вейвлет-анализу сигнала. В качестве примера проведем анализ солнечной активности, показателем которой служит среднегодовое число пятен на Солнце. График изменения числа пятен за последние 50 лет имеет период, который охватывает приблизительно 11 лет. Стандартное вейвлет-преобразование проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время-масштаб. На вейвлет-плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствуют темные и светлые пятна, распределенные вертикально в левой части рис. 4.

Рис. 4 демонстрирует преимущество вейвлет-анализа перед анализом Фурье в случае нестационарного сигнала. На рисунке видно изменение сигнала по времени. Такой информации не содержит преобразование Фурье. Частотный анализ сигнала проведем, выполнив предварительную фильтрацию сигнала используя формулу (2) с параметрами $m = 2$, $n = 4$, $\alpha = 1$.

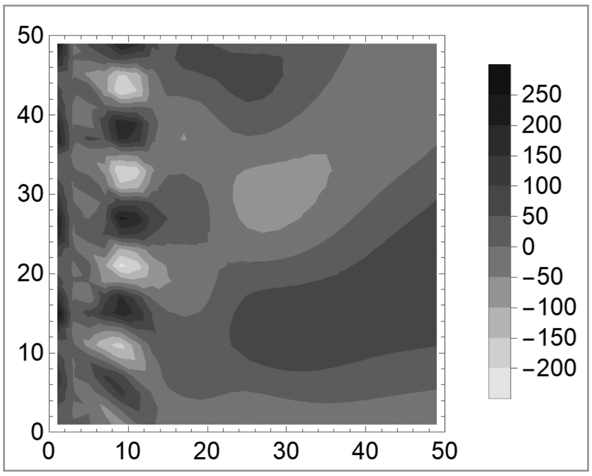
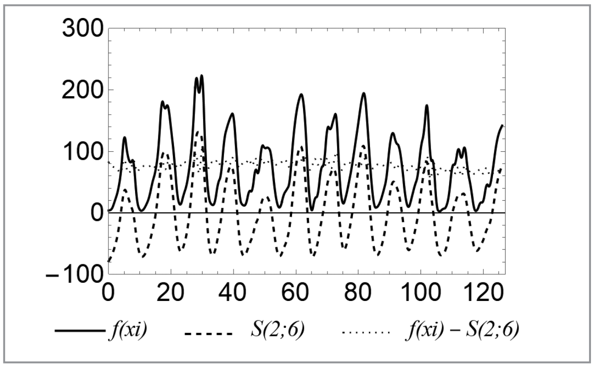


Рис. 4. Скалограмма солнечных пятен $W(a, b)$

Спектральная диаграмма амплитуд содержит амплитуды всех гармоник, из которых складывается сигнал. Таким образом, преобразование Фурье дополняет результаты вейвлет-анализа.

На рис. 5 видны амплитуды гармоник, которые соответствуют примерно 11-летнему периоду колебаний солнечной активности в течение последних 128 лет, также можно обнаружить небольшие периодические колебания солнечной активности с периодом около ста лет.



Исходный сигнал, отфильтрованный сигнал и остаточный сигнал

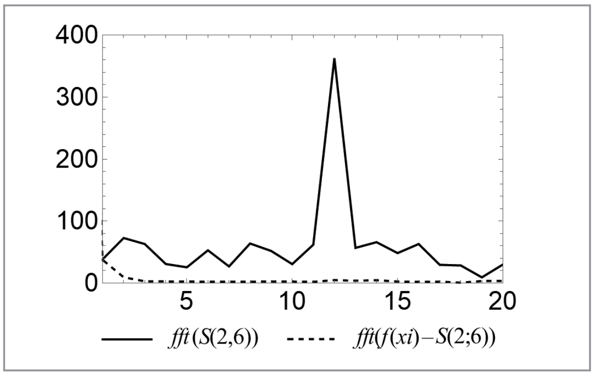


Рис. 5. Спектр Фурье отфильтрованного и остаточного сигнала

Выводы

В некоторых случаях для анализа сигнала можно применить предварительную фильтрацию сигнала, используя сингулярные вейвлеты. После предварительной фильтрации можно выполнить спектральный анализ сигнала. Такой подход удобно применять в сочетании с классическим вейвлет-анализом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марпл, С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл. – М.: Мир, 1990. –584 с.
2. **Чуи, К.** Введение в вэйвлеты / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

3. **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам. / И. Добеши. Ижевск: НИЦ РХД, 2001. – 464 с.
4. **Дьяконов, В.П.** Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН Пресс, 2004. – 400 с.
5. **Романчак, В.М.** Аппроксимация сингулярными вейвлетами / В.М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика, 2018. – № 2. – С. 23–28.
6. **Романчак В.М.** Локальные преобразования с сингулярным вейвлетом / В.М. Романчак // Информатика, 2020. – Т. 17. – № 1. – С. 39–46.
7. **Романчак В.М.** Сингулярные вейвлеты на конечном интервале / В.М. Романчак // Информатика, 2018. – Т. 15. – № 4. – С. 39–49.
8. **Кулаичев, А.П.** Критика вейвлет анализа ЭЭГ / А.П. Кулаичев // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2016. – Т. 1. – № 12. – С. 47–57.
9. **Кулаичев, А.П.** Компьютерная электрофизиология и функциональная диагностика / А.П. Кулаичев. – М.: ФОРУМ – ИНФРА-М, 2016. – 640 с.
10. **Komorowski, D.** The Use of Continuous Wavelet Transform Based on the Fast Fourier Transform in the Analysis of Multi-channel Electrogastrography Recordings / D. Komorowski, S. Pietraszek // J. Med. Syst. – V. 40. – No. 10. – 2016. Doi: 10.1007/s10916–015–0358–4.

REFERENCES

1. **Marple, S.L.** Digital spectral analysis and its applications / S.L. Marple. – M.: Mir, 1990. –584 p.
2. **Chewy, K.** Introduction to wavelets / K. Chewy. – M.: Mir, 2001. – 412 p.
3. **Dobeshi, I.** Ten lectures on wavelets. / I. Dobeshi. Izhevsk: SRC “RCD”, 2001. – 464 p.
4. **Dyakonov, V.P.** Wavelets. From theory to practice / V.P. Deacons. – M .: SOLONPress, 2004. – 400 c.
5. **Romanchak, V.M.** Approximation by singular wavelets / V.M. Romanchak // System analysis and applied informatics, 2018. – No. 2. – P. 23–28.
6. **Romanchak V.M.** Local transformations with a singular wavelet / V.M. Romanchak // Computer Science, 2020. – V. 17. – No.1. – P. 39–46.
7. **Romanchak V.M.** Singular wavelets on a finite interval / V.M. Romanchak // Informatika, 2018. – T. 15. – No. 4. – P. 39–49.
8. **Kulachev, A.P.** Critique of the wavelet analysis of the EEG / A.P. Kulachev // Actual problems of the humanities and natural sciences, 2016. – V. 1. – No. 12. – P. 47–57.
9. **Kulachev, A.P.** Computer electrophysiology and functional diagnostics / A.P. Kulaichev. – M.: FORUM–INFRA-M, 2016. – 640 p.
10. **Komorowski, D.** The Use of Continuous Wavelet Transform Based on the Fast Fourier Transform in the Analysis of Multi-channel Electrogastrography Recordings / D. Komorowski, S. Pietraszek // J. Med. Syst. – V. 40. – No. 10. – 2016. Doi: 10.1007/s10916–015–0358–4.

Поступила 20.05.2020 *После доработки* 20.11.2020 *Принята к печати* 01.12.2020

ROMANCHAK V., HUNDZINA M.

STANDARD AND SINGULAR WAVELET ANALYSIS

Belarusian National Technical University

Annotation. The paper suggests that the use of classical wavelets may be auxiliary in the analysis of a periodic signal. This is because the intuitive interpretation of the wavelet transform is not obvious. It is proposed to consider the Fourier transform as the main tool in applied research of periodic signals. An example is provided to support this point of view. To isolate the periodic component of the signal, along with wavelet analysis, it is proposed to perform spectral analysis. To do this, pre-filtering is performed using singular wavelets. This approach can significantly complement classical wavelet analysis.

Keywords: *Wavelet analysis, singular wavelet, the number of sunspots, Wolfram Mathematica.*

Романчак Василий Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь. E-mail: Romanchak@bntu.by

Гундина Мария Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь.
E-mail: hundzina@bntu.by