

УДК (631.171:004.3):636.2.034 (043.3)

А. Г. СЕНЬКОВ, И. И. ГИРУЦКИЙ, А. Б. ГРИЩЕНКО

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ МОЛОКА В ВЫМЕНИ КОРОВЫ

Учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет»

*В работе предложена математическая модель, описывающая динамику метаболического процесса образования молока в вымени коровы в зависимости от значения промежутка времени, прошедшего с момента окончания последнего доения. Интенсивность процесса образования молока в вымени коровы, а, следовательно, и ее молочная продуктивность, зависит, в том числе, от оптимального выбора кратности доений в сутки с определенными интервалами времени между доениями. Предлагаемая модель позволит учитывать данные факторы при анализе и оптимизации условий содержания молочного стада крупного рогатого скота (КРС). Результаты исследований применимы при диагностике состояния коровы, при сравнительной оценке эффективности кратности доения и т. д. Коэффициент детерминации, при использовании в качестве модели аperiodического звена, составил 0,82. Преимуществом предлагаемого подхода к идентификации биологического объекта – коровы – является использование методики пассивного эксперимента на основе статистической обработки массивов экспериментальных данных по надоям, регистрируемых современными информационными системами управления стадом КРС на действующих молочно-товарных комплексах.*

### Введение

В информационном обеспечении молочного скотоводства развиты и широко применяются разнообразные модели лактационных кривых [1]. Как правило, такие модели связывают прогноз суточного надоя с фазой лактации (лактация – период выработки молока у коровы продолжительностью около 300 дней, начиная с даты последнего отела). Анализ литературы и реальных экспериментальных данных показывает, наряду с другими факторами, влияние на текущий надой промежутка времени между доениями и кратности доения [2, 3]. Так, зоотехническими исследованиями установлено [4], что скорость образования молока в вымени коровы неравномерна по времени: интенсивная секреция молока у коров наблюдается в течение 4 ч после очередного доения, а затем она уменьшается и постепенно прекращается через 10 ч. При этом исследование влияния промежутка времени между доениями на объем накопленного молока традиционно выполнялось методом активного эксперимента [2–4]: осуществлялись дойки коровы через разные промежутки вре-

мени и измерялось количество полученного молока. Однако проведение подобного активного эксперимента с биологическим объектом, каким является корова, имеет существенный недостаток, связанный с нарушением физиологического ритма животного, что может служить источником погрешности измерений. В то же время в Республике Беларусь функционируют большое число молочно-товарных комплексов с автоматизированными доильными залами и компьютеризированными системами управления стадом (СУС). В СУС в автоматическом режиме ведется регистрация данных по надоям. Структура регистрируемых данных обычно включает в себя следующие поля: номер коровы, номер дня в годовом цикле лактации (начиная с даты последнего отела), номер доения в течение суток (1 – утреннее, 2 – дневное, 3 – вечернее), полученный надой молока (кг), дата и время начала доения, длительность доения (с) и т. д. Пример структуры таблицы базы данных по доению, используемой в отечественном модуле управления доением «Майстар» [5], представлен в таблице.

Т а б л и ц а. Фрагмент и структура таблицы базы данных модуля управления доением «Майстар»

Номер коровы	День лактации	Доение	Надой молока, кг	Дата	Время начала доения	Длительность доения, с
2	50	1	9,570	06.08.17	06:52:15	340
2	50	2	3,593	06.08.17	13.05.15	303
2	50	3	3,558	06.08.17	19.10.13	258
2	51	1	9218	07.08.17	06:40:37	391
2	51	2	3,571	07.08.17	13.06.15	280
2	51	3	3104	07.08.17	18.43.49	253
2	52	1	8,815	08.08.17	06:59:24	453
2	52	2	4,097	08.08.17	13.16.44	276
2	52	3	3940	08.08.17	18.50.11	266
...	...	...	...	...	...	...

Таким образом, возникает возможность путем обработки больших массивов данных (для 1 коровы, при 305 днях лактации и трехразовом доении – 915 измерений; стадо – 200, 400 или 600 коров) в рамках пассивного эксперимента выполнить идентификацию математической модели метаболического процесса образования молока в вымени коровы.

В данной работе предложены математические модели, описывающие динамику образования молока в вымени в зависимости от времени, прошедшего с момента последнего доения. На основе статистического анализа экспериментальных данных по надоям коров выполнена оценка точности предложенных моделей.

### Основная часть

Теоретическое математическое описание процессов жизнедеятельности, происходящих в живых организмах, является весьма сложной задачей в силу ограниченности классического математического аппарата. В настоящее время для решения подобных задач все большую популярность приобретают методы нечеткой логики, нейронных сетей. Более традиционным подходом является использование динамически детерминированных моделей на основе так называемой, «модели серого ящика», когда структура модели задается априорно, исходя из определенных эмпирических соображений, а численные значения параметров модели определяются расчетным путем на основе данных экспериментов [1, 6, 7]. Примером такого подхода, в частности, является модель кривой лактации Вуда [1].

Сложность формализации коровы как биологического объекта синтеза молока заключается как в нестационарности величины суточ-

ных надоев молока в течение периода лактации, так и величины текущего разового надоя. Для рассматриваемого в данной работе процесса молокообразования в вымени коровы предлагается математическое описание скорости молокообразования в вымени в следующем виде:

$$v = \begin{cases} v_0, & y < y_{\max}, \\ 0, & y \geq y_{\max}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $v$  – мгновенное значение интенсивности процесса образования молока в вымени без учета инерционности физиологических реакций организма коровы, кг/ч.;  $v_0$  – интенсивность процесса образования молока до момента наполнения вымени, кг/ч.;  $y$  – количество молока в вымени, образовавшееся с момента окончания последнего доения, кг;  $y_{\max}$  – некоторое максимально допустимое количество молока в вымени (максимальная емкость), при достижении которого прекращается процесс дальнейшего образования молока, кг.

Таким образом, интенсивность процесса образования молока в вымени постоянна до тех пор, пока количество накопленного в вымени молока  $y$  меньше некоторого максимального значения  $y_{\max}$ . Для учета инерционности физиологической реакции организма коровы на опустошение вымени по окончании доения, а также на полное заполнение вымени и прекращение дальнейшего молокообразования в модель введено дополнительное апериодическое звено:

$$W_1(s) = \frac{F(s)}{V(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad (2)$$

где  $F(s) = L[\dot{y}(t)]$ ,  $V(s) = L[v(t)]$ ,  $L[...]$  – оператор изображения Лапласа;  $\dot{y}$  – скорость образования молока в вымени, кг/ч.;  $T_1$  – посто-

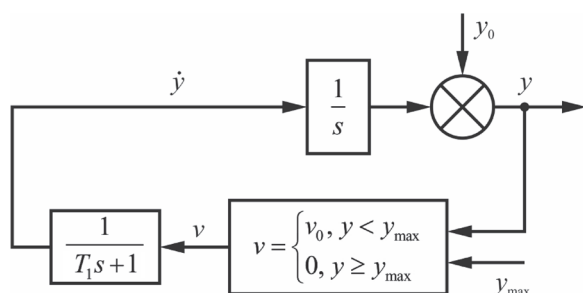


Рис. 1. Математическая модель интенсивности процесса образования молока в вымени коровы

янная времени, характеризующая инерционность возобновления процесса образования молока в вымени после окончания доения, а также прекращение дальнейшего образования молока при наполнении вымени до максимума, ч.

Операторному уравнению (2) соответствует дифференциальное уравнение:

$$T_1 \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = v(t). \quad (3)$$

Структурная схема предлагаемой математической модели интенсивности процесса образования молока представлена на рис. 1. Значение  $y_0$  задает начальное условие – остаток молока в вымени коровы по окончании последнего доения. На практике обычно  $y_0 = 0,5$  кг [2–4].

Значения параметров модели  $T_1, y_{\max}$  определяются физиологическими особенностями данной конкретной коровы, ее уровнем молочной продуктивности и могут изменяться со временем от момента отела до окончания лактации. Численные значения параметров  $T_1, y_{\max}$  определялись на основе метода наименьших квадратов; в качестве целевой функции использовалась сумма квадратов отклонений  $N$  значений последовательных реальных надоев  $y^*$  от модели  $y$ :

$$z = \sum_{j=1}^N (y_j^* - y(t_j))^2 \rightarrow \min_{T_1, y_{\max}}. \quad (4)$$

Для упрощения и линеаризации представленной на рис. 1 математической модели вместо предположения (1) используем предположение о том, что скорость образования молока уменьшается по мере наполнения вымени пропорционально количеству накопленного в нем молока [2, 3], т. е.:

$$v(t) = k(y_{\max} - y_0 - y(t)), \quad (5)$$

где  $k$  – некоторый постоянный коэффициент, значение которого индивидуально для каждой конкретной коровы,  $1/\text{ч}$ .

В результате, с учетом выражения (3), получим:

$$T_2^2 \cdot \ddot{y}(t) + T_3 \dot{y}(t) + y(t) = y_{\max} - y_0, \quad (6)$$

где  $T_2 = \sqrt{\frac{T_1}{k}}$  ч.,  $T_3 = \frac{1}{k}$  ч. – постоянные времени.

Таким образом, динамика накопления молока в вымени коровы может быть описана типовым линейным апериодическим звеном 2-го порядка [7].

Значения параметров рассматриваемых моделей –  $y_{\max}, T_1, v_0, T_2, T_3$  могут быть определены численно по результатам регистрации значений фактических надоев  $y^*$  и промежутков времени  $t$  между доениями за последние  $N$  дней, например, за предшествующую неделю.

Результаты численной оценки адекватности предложенных математических моделей процесса образования и накопления молока представлены на рис. 2. Расчеты проведены на основании зарегистрированных данных о фактических надоях выбранной коровы за 7 последовательных дней при трехразовом доении в сутки (утром, в обед и вечером). На данном рисунке по оси абсцисс отсчитывается время, прошедшее с момента окончания каждого предыдущего доения, по оси ординат – количество молока, образующееся в вымени коровы по прошествии соответствующего интервала времени с момента окончания предыдущего доения. Маркерами на рис. 2 отмечены значения фактических зарегистрированных надоев молока. Кривая 1 соответствует модели (1) – (2), кривая 2 – модели (6). Соответствующие числовые значения параметров моделей равны:

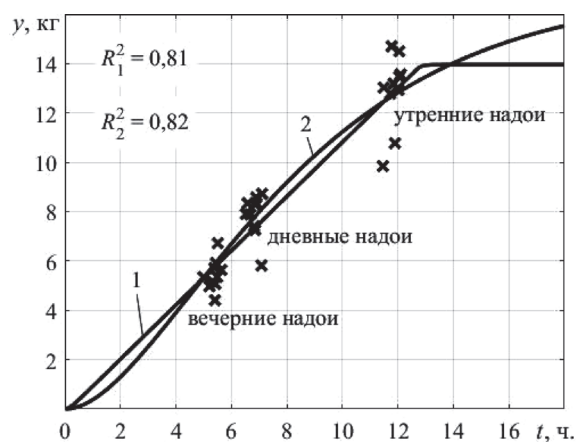


Рис. 2. Численная оценка адекватности рассматриваемых математических моделей интенсивности процесса образования молока

для модели (1) – (2):  $y_{\max} = 12,6$  кг,  $T_1 = 0,66$  ч,  $v_0 = 1,2$  кг/ч, коэффициент детерминации  $R_1^2 = 0,81$ ;

для аperiodического звена 2-го порядка (6):  $y_{\max} = 17$  кг,  $T_2 = 2,33$  ч,  $T_3 = 4,66$  ч, коэффициент детерминации  $R_2^2 = 0,82$ .

Таким образом, для целей прогнозирования единичного надоя от коровы с учетом интервала времени между последовательными доениями может быть использована математическая модель скорости молокообразования в виде аperiodического звена 2-го порядка (6).

На основе данных моделей разработаны метод динамической экспресс-оценки оптимальности выдерживаемых интервалов между доениями коровы с точки зрения повышения ее молочной продуктивности и имитационная модель сравнения эффективности двух- и трехкратного доения коров в условиях конкретного молочно-товарного комплекса с учетом дополнительных затрат.

### Заключение

Впервые обосновано применение математической модели накопления молока в вымени коровы в зависимости от времени, прошедшего с момента окончания предыдущего доения, в виде аperiodического звена 2-го порядка. Предложенные математические модели не про-

тиворечат зоотехническим данным. Использование методики пассивного эксперимента позволяет без нарушения физиологического ритма коровы получить необходимый набор данных прямо в условиях действующего производства. Идентификация значений параметров математической модели выполняется с использованием метода наименьших квадратов на основе фактических данных по надоям коровы, зарегистрированных за последние 7–10 дней. Разработанные модели оценки влияния промежутка времени между доениями на надой молочных коров, полученные путем обработки больших массивов данных с действующих СУС, позволяют решать ряд прикладных задач. Эти результаты могут быть использованы в многопараметрической модели идентификации животных [8]. Оценка отклонений реальной продуктивности коров от прогнозных модельных значений может быть положена в основу диагностики состояния животных, а также поддержания оптимальных параметров технологии кормления и содержания животных. Предложенная модель также может быть использована при технико-экономической оценке выбора кратности доения коров для конкретных производственных условий как при предпроектных расчетах, так и в условиях реальной молочно-товарной фермы или комплекса.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Thornley, J. H. M.** Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences / J. H. M. Thornley, J. France. – Wallingford, Oxfordshire, Cambridge, MA: CABI Pub, 2004.
2. **Лапотко, А. М.** Сколько раз? – 1, 2, 3, или 4... и в какой час выгодно доить корову / А. М. Лапотко, Н. И. Песоцкий // Наше сельское хозяйство. – 2010. – № 11. – с. 27–31.
3. **Лапотко, А. М.** Сколько раз? – 1, 2, 3, или 4... и в какой час выгодно доить корову / А. М. Лапотко, Н. И. Песоцкий // Наше сельское хозяйство. – 2010. – № 12. – с. 70–76.
4. **Марченко, Г.** Влияние содержания коров на их молочную продуктивность // Молочное и мясное скотоводство. – 1996. – № 2. – с. 6–8.
5. **Грищенко, А. Б.** Экспериментально-теоретические исследования средств идентификации дойных коров / А. Б. Грищенко, И. И. Гируцкий, А. Г. Сеньков // Механизация и электрификация сельского хозяйства: межведомственный тематический сборник. – Вып. 49. – Минск: НППЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства, 2015. – С. 173–178.
6. **Китиков, В. О.** Применение математических моделей лактационных кривых для эффективного планирования валового производства молока / В. О. Китиков, Е. В. Тернов // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2011. – № 1. – С. 68–73.
7. **Eykhoff, P.** System identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – London: John Wiley & Sons, 1974.
8. **Патент № 21661.** Республика Беларусь, МПК А 01К 11/00. Способ идентификации коровы в доильном зале / Грищенко А. Б., Гируцкий И. И., Сеньков А. Г.; заявитель и патентообладатель Учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет». – № а20150489; заяв. 13.10.2015; опуб. 28.02.2018, Бюл. № 1. – 84–85 с.

### REFERENCES

1. **Thornley, J. H. M.** Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences / J. H. M. Thornley, J. France. – Wallingford, Oxfordshire, Cambridge, MA: CABI Pub, 2004.

2. **Lapotko, A. M.** How many times? – 1, 2, 3, or 4... and in what time of the day is better to milk a cow / A. M. Lapotko, N. I. Pesotski // Our agriculture. – 2010. – № 11. – P. 27–31.
3. **Lapotko, A. M.** How many times? – 1, 2, 3, or 4... and in what time of the day is better to milk a cow / A. M. Lapotko, N. I. Pesotski // Our agriculture. – 2010. – № 12. – P. 70–76.
4. **Marchenko, G.** The effect of farm conditions on the level of cows' milk production // Journal of Dairy and Beef Cattle Farming. – 1996. – № 2. – P. 6–8.
5. **Grischenko, A. B.** Experimental and theoretical studies of means of identification of dairy cows / A. B. Grischenko, I. I. Girutski, A. G. Senkov // Mechanization and electrification of agriculture: interdepartmental thematic collection. – Issue 49. – Minsk: Scientific Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Agricultural Mechanization, 2015. – P. 173–178.
6. **Kitikov, V. O.** Application of a simulation model of lactation curves for effective planning of milk production / V. O. Kitikov, E. V. Ternov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series. – 2011. – № 1. – P. 68–73.
7. **Eykhoff, P.** System identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – London: John Wiley & Sons, 1974.
8. **Grischenko, A. B.** Sposob identifikacii korovi v doilnom zale [A method for identifying a cow in a milking parlor]. Patent BY, no. 21661. 2018.

Поступила  
03.01.2019

После доработки  
23.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

*SENKOV A. G., GIRUTSKI I. I., GRISCHENKO A. B.*

## MATHEMATICAL MODEL OF MILK SECRETION IN A COW'S UDDER

*Belarusian State Agrarian Technical University*

*The paper proposed a mathematical model that describes the dynamics of the physiological process of milk secretion in the cow's udder, depending on the value of the time interval that has passed since the end of the last milking. The intensity of this process, and, consequently, the cow's milk production level, depends, among other things, on the optimal choice of the multiplicity of milkings per day with certain time intervals between milkings. The proposed model will allow to take into account these factors in the analysis and optimization of conditions for the maintenance of dairy cattle herds. The results of the research are applicable in diagnosing the state of a cow, in a comparative assessment of the effectiveness of milking multiplicity, etc. The model's determination coefficient is 0.82 for the aperiodic link used as a model. The advantage of the proposed approach to the identification of a biological object – a cow – is the use of a passive experiment technique based on statistical processing of experimental data on yields recorded by modern information systems for the management of cattle on existing dairy farms.*



**Сеньков Андрей Григорьевич.** 220113, г. Минск, ул. Литературная, д. 22, кв. 1.  
Моб. тел. 8029 5046465, e-mail: sencov\_1981@tut.by  
Белорусский государственный аграрный технический университет, к. т. н.,  
доцент



**Гируцкий Иван Иванович,** 220025, г. Минск, ул. Есенина, д. 6, корп. 1, кв. 700.  
Моб. тел. 8029 3087244, e-mail: gir\_50@mail.ru.  
Белорусский государственный аграрный технический университет, д. т. н.,  
доцент





**Грищенко Андрей Борисович**, 220015, г. Минск, ул. Пономаренко, д. 32, кв. 176.

Телефон: + 375293669969, e-mail: [Andrey\\_gr1@mail.ru](mailto:Andrey_gr1@mail.ru).

Белорусский государственный аграрный технический университет, аспирант.