УДК 681.518

А. А. ЛОБАТЫЙ, БНТУ

ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аналитически получены выражения для векторов сноса и матриц диффузии подсистем сложной стохастической системы, в которых учтены составляющие, зависящие от детерминированного и случайного влияния других подсистем системы.

Expressions for vectors of a pulling down and matrixes of diffusion of subsystems of difficult stochastic system in which the components depending on determined and casual influence of other subsystems of system are considered are analytically received.

Введение

Математическая модель сложной системы состоит из математических моделей элементов и математической модели взаимодействия между элементами [1]. Практически все реальные технические системы являются стохастическими, так как они либо имеют внутренние шумы, либо подвержены внешним случайным воздействиям – помехам, а чаще всего имеет место и то и другое. Используемые для их описания математические модели, как правило, представляются стохастическими уравнениями в форме Ито или в форме Ланжевена [2]. При этом модели действующих на систему случайных воздействий с помощью уравнений, так называемых формирующих фильтров, входными параметрами которых являются белые шумы, сводятся к каноническому виду.

Основная часть

Любой из элементов (подсистем) сложной стохастической непрерывной системы и система в целом в достаточно общей форме могут быть описаны каноническими векторно-матричными стохастическими уравнениями в форме Ланжевена вида

$$\dot{X}(t) = D(t)\varphi(X,t) + W(X,t)U(t) + H(X,t)\xi(t),$$

$$X(t_0) = X_0 \qquad (1)$$

где $X(t)$ в общем случае n-мерный случайный вектор (матрица-столбец); $D(t)$ – матрица порядка $n \times n$ детерминированных параметров с компонентами d_{kr}; $\varphi(X,t)$ – векторная, $W(X,t)$, $H(X,t)$ – матричные нелинейные функции; $U(t)$ – r-мерная ($r < n$) векторная функция управления; ξ – n-мерный вектор центрированного гауссового белого шума с положительно-определенной матрицей интенсивностей $G(t)$ и матрицей корреляционных функций:

$$K_\xi(t,t') = G(t)\delta(t-t'), \qquad (2)$$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1, \; \tau = t - t'. \qquad (3)$$

$\delta(\tau)$ – дельта функция Дирака. $X \in R^n$, $U \in R^r$, $\xi \in R^n$. R^n – n-мерное евклидово пространство. Точкой в выражении (1) отмечена полная производная вектора X по времени t.

Сложная система в целом, как и входящие в нее подсистемы, может быть представлена в виде векторно-матричного уравнения вида (1). При этом входящие в (1) компоненты имеют вид блочных векторных функций и блочных матриц коэффициентов, состоящих из подматриц коэффициентов подсистем размерностей ni, которые в общем случае имеют вид:

$$X^{\mathrm{T}}(t) = [X_1(t), X_2(t) \ldots X_v(t)],$$

$$U^{\mathrm{T}}(t) = [U_1(t), U_2(t) \ldots U_v(t)],$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t) \ldots \xi_v(t)],$$

$$\varphi^{\mathrm{T}}(X,t) = [\varphi_1(X_1,t), \varphi_2(X_2,t) \ldots \varphi_v(X_v,t],$$

$$W^{\mathrm{T}}(X,t) = [W_1(X_1,t), W_2(X_2,t) \ldots W_v(X_v,t)],$$

$$H^{\mathrm{T}}(X,t) = [H_1(X_1,t), H_2(X_2,t) \ldots H_v(X_v,t)].$$

Марковские процессы вида (1) полностью определяются своими локальными характеристиками. Рассмотрим локальные характеристики *i*-й подсистемы сложной системы: векторы сноса $A_i(X_i,t)$ с компонентами $A_{ik}(X_i,t)$ и матрицы диффузии $B_i(X_i,t)$ с компонентами $B_{ipl}(X_i,t)$, ($i=\overline{1,v}$, $k,p,l=\overline{1,ni}$).

По определению [1] вектор сноса есть скорость изменения условного математического ожидания приращения вектора фазовых координат при фиксированном значении этого вектора в момент времени *t*. В соответствии с определением вектор сноса вычисляется по формуле

$$A(X,t)=\lim_{\Delta t\to 0}M[\Delta X\,|\,X(t)=X], \qquad (4)$$

где $\Delta X=X(t+\Delta t)-X(t)$ – вектор приращения фазовых координат за время Δt, X – фиксированное значение вектора.

Матрица диффузии, по определению, есть скорость изменения дисперсии случайного марковского процесса. Поэтому ее можно вычислить по формуле

$$B(X,t)=\lim_{\Delta t\to 0}M[\Delta X\Delta X'\,|\,X(t)=X]. \qquad (5)$$

Заметим, что выходные сигналы подсистем Y_j являются не только сигналами управления, оказывающими влияние на скорости изменения векторов фазовых координат X_i, но в то же время Y_j входят в состав параметров (матриц коэффициентов) подсистем. Это влияние может быть учтено в математических моделях введением параметрических неопределенностей в виде параметрических мультипликативных и аддитивных шумов [3]. С учетом этого уравнение, описывающее динамику изменения фазовых координат подсистемы (1), примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\dot X_i(t)=[D_i(t)+\xi_{iD}(t)]\varphi_i(X_i,t)+[W_i(X_i,t)+\\+\xi_{iW}(t)]U_i(t)+H_i(X_i,t)[\xi_i(t)+\xi_{iY}(t)],\\X_i(t_0)=X_{i0},\end{gathered} \qquad (6)$$

где $D_i(t)$, $\xi_i(t)$ – детерминированная и случайная компоненты процесса $X_i(t)$, не зависящие от смежных подсистем и каналов связи. $\xi_{iD}(t)$, $\xi_{iW}(t)$ и $\xi_{iY}(t)$ – соответственно мультипликативная и аддитивная случайные компоненты (шумы) процесса $X_i(t)$, учитывающие влияние смежных подсистем и каналов связи (назовем их топологическими шумами).

Преобразуем уравнение (6) к виду

$$\begin{gathered}\dot X_i(t)=D_i(t)\varphi_i(X_i,t)+W_i(X_i,t)U_i(t)+\\+H_i(X_i,t)\xi_i(t)+H_{iT}(X_i,t)\xi_{iT}(t),\end{gathered} \qquad (7)$$

Последнее слагаемое в (7) характеризует влияние топологических случайных факторов на вектор фазовых координат подсистемы (других подсистем сложной системы).

$$\begin{gathered}H_{iT}(X_i,t)\xi_{iT}(t)=\xi_{iD}(t)\varphi_i(X_i,t)+\\+\xi_{iW}(t)U_i(t)+H_i(X_i,t)\xi_{iY}(t).\end{gathered} \qquad (8)$$

При известных интенсивностях шумов уравнение (6) можно свести к каноническому виду путем перехода к новой переменной – обобщенному аддитивному шуму.

$$H_{io}(X_i,t)\xi_{io}(t)=H_i(X_i,t)\xi_i(t)+H_{iT}(X_i,t)\xi_{iT}(t). \qquad (9)$$

Формулы для векторов сноса и матриц диффузии подсистем в данном случае имеют вид [4]

$$\begin{gathered}A_i(X_i,t)=D_i(t)\varphi_i(X_i,t)+W_i(X_i,t)U_i+\\+\frac{1}{2}\frac{\partial H_{io}{}^T(X,t)}{\partial X}G_{io}(t)H_{io}(X,t),\end{gathered} \qquad (10)$$

$$B_i(X,t)=H_{io}{}^T(X,t)G_{io}(t)H_{io}(X,t). \qquad (11)$$

$G_i\ (t)$ – матрица интенсивностей обобщенного белого шума, определяемого выражением (9). Вычисление данной матрицы на практике может вызвать значительные трудности, так как она зависит от многих факторов, в том числе и случайных.

Определим топологические составляющие вектора сноса и матрицы диффузии. Для этого предварительно запишем каноническое уравнение для *p*-й компоненты марковского процесса (6) с учетом (8), (9) (индекс *i* для упрощения записи при этом опустим) в форме

$$\begin{gathered}\dot x_p(t)=\sum_{k=1}^{ni}d_{pk}(t)\varphi_k(X,t)+\sum_{k=1}^{ni}h_{pk}(X,t)\xi_k(t)+\\+\sum_{k=1}^{ni}w_{pk}(X,t)u_k(t)+\sum_{k=1}^{ni}h_{Tpk}(X,t)\xi_{Tk}(t),\end{gathered} \qquad (12)$$

где

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{ni}h_{Tpk}(X,t)\xi_{Tk}(t)=\sum_{k=1}^{ni}\varphi_k(X,t)\xi_{Dk}(t)+\\+\sum_{k=1}^{ni}u_k(t)\xi_{Wk}(t)+\sum_{k=1}^{ni}h_{pk}(X,t)\xi_{Yk}(t).\end{gathered} \qquad (13)$$

С помощью такого приема любой мультипликативный шум сводится к аддитивному шуму.

В последующем примем $h_{Tpk}(X,t) = \{\varphi_k(X,t), u_k(t), h_{pk}(X,t)\}$ – множество топологических коэффициентов; $\xi_{Tk}(t) = \{\xi_{Dk}(t), \xi_{Wk}(t), \xi_{Yk}(t)\}$ – множество топологических шумов.

Определим приращение вектора фазовых координат подсистемы. Для этого проинтегрируем уравнение (12) по времени на интервале $[t, t+\Delta t]$ и представим результат интегрирования в следующей форме:

$$\Delta X = \sum_{k=1}^{ni} \int_t^{t+\Delta t} d_{pk}(\tau)\varphi_k(X,\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{ni} \int_t^{t+\Delta t} w_{pk}(\tau)u_k(X,\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{ni} \int_t^{t+\Delta t} h_{pk}(X,\tau)\xi_k(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{ni} \int_t^{t+\Delta t} h_{Tpk}(X,\tau)\xi_{Tk}(\tau)d\tau. \quad (14)$$

Третья и четвертая суммы в (14) представляют собой суммы стохастических интегралов.

Среди различных определений стохастических интегралов наиболее часто используют определения по К. Ито (несимметризованная форма) или по Р. Л. Стратоновичу (симметризованная форма) [2]. Интеграл К. Ито обладает большим преимуществом перед другими интегралами, которое заключается в простоте вычисления моментов интеграла (математического ожидания и дисперсии), так как в несимметризованной форме функция $h(X,t)$ и белый шум $\xi(t)$ для одного и того же момента времени независимы по определению. В симметризованной форме $h(X,t)$ и $\xi(t)$ зависимы, следовательно математическое ожидание стохастического интеграла не равно нулю, что в общем случае лучше отражает физическую сущность динамической системы.

Для того чтобы выразить значения нелинейных функций $\varphi_k(X,\tau)$, $w_{pk}(X,\tau)$, $h_{pk}(X,\tau)$, $h_{Tpk}(X,\tau)$ через их значения в момент t и приращение, необходимо произвести их линеаризацию. Если эти функции дифференцируемы по вектору фазовых координат, то целесообразно воспользоваться разложением их в ряд Тейлора. Если же эти функции существенно нелинейные, то необходимо применить статистическую линеаризацию [2, 4]. Рассмотрим случай, когда эти функции дифференцируемы, что соответствует большинству реальных математических моделей систем. Входящую в (12) p-ю фазовую координату i-й подсистемы представим в виде

$$X_p(\tau) = X_p(\tau) + \int_t^{\tau} dX_p, \; p = \overline{1, ni}, \; t<\tau<t+\Delta t \quad (15)$$

Вычислим условное математическое ожидание приращения p-й фазовой координаты i-й подсистемы при фиксированном значении вектора фазовых координат в момент t $M[\Delta X_p \mid X(t) = X]$, предварительно разложив нелинейные функции $\varphi_p(X,\tau)$, $w_p(X,\tau)$, $h_p(X,\tau)$, $h_{Tp}(X,\tau)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки $x(t)$, сохранив только линейные члены.

После соответствующих подстановок и преобразований [5], отбросив величины высшего порядка малости, разделив обе части полученного выражения для $M[\Delta X_p \mid X(t) = X]$ на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$ в соответствии с определением вектора сноса (4), получим формулу для p-й компоненты вектора сноса i-й подсистемы.

$$\begin{aligned} A_p(X,t) &= \sum_{k=1}^{ni} d_{pk}(t)\varphi_k(X,t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{ni} u_{pk}(X,t)w_{pk}(X,t) + \sum_{k=1}^{ni} h_{pk}(X,t)M[\xi_k(t)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{ni} h_{Tpk}(X,t)M[\xi_{Tk}(t)] + \\ &+ \sum_{k,m,q=1}^{ni} (\partial h_{pk}(X,t)/\partial x_m)h_{mq}(X,t)G_{qk}(t)/2 + \\ &+ \sum_{k,m,q=1}^{ni} (\partial h_{Tpk}(X,t)/\partial x_m)h_{Tmq}(X,t)G_{Tqk}(t)/2 + \\ &+ \sum_{k,m,q=1}^{ni} (\partial h_{pk}(X,t)/\partial x_m)h_{Tmq}(X,t)G_{Tqk}(t)/2 + \\ &+ \sum_{k,m,q=1}^{ni} (\partial h_{Tpk}(X,t)/\partial x_m)h_{mq}(X,t)G_{Tqk}(t)/2, \\ & p = 1,\ldots,ni. \end{aligned} \quad (16)$$

$G_{qk}(t)$ и $G_{Tqk}(t)$ – взаимные интенсивности соответствующих q-х и k-х компонент шумов $\xi(t)$ и $\xi_T(t)$. Если шумы $\xi_k(t)$ и $\xi_{Tk}(t)$ центрированные, то третье и четвертое слагаемые в (16) равны нулю. В векторно-матричном виде выражение для вектора сноса i-й подсистемы имеет вид

$$A_i(X_i,t)=D_i(t)\varphi_i(X,t)+W_i(X,t)U_i+$$
$$+H_i(X,t)M[\xi(t)]++H_{iT}(X,t)M[\xi_T(t)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_i(X,t)/\partial X_i)^T G_i(t)H_i(X,t)+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_{iT}(X,t)/\partial X_i)^T G_{iT}(t)H_{iT}(X,t)+ \quad (17)$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_{\partial}(X,t)_{iT}/\partial X_i)^T G_i\ (t)H\ (X,t)+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_{iT}(X,t)/\partial X_i)^T G_{iT}(t)H_{iT}(X,t).$$

Перепишем формулу (17) в виде

$$A_i(X,t)=D_i(t)\varphi_i(X,t)+H_i(X,t)M[\xi(t)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_i(X,t)/\partial X_i)^T G_i(t)H(X,t)+\Delta A_{iT}(X,t), \quad (18)$$

где $\Delta A_{iT}(X,t)$ – топологическая составляющая вектора сноса *i*-й подсистемы

$$\Delta A_{iT}(X,t)=W_i(X,t)U_i+H_{iT}(X,t)M[\xi_T(t)]+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_{iT}(X,t)/\partial X_i)^T G_{iT}(t)H_{iT}(X,t)+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_i(X,t)/\partial X_i)^T G_{iT}(t)H_{iT}(X,t)+$$
$$+\frac{1}{2}(\partial H_{iT}(X,t)/\partial X_i)^T G_{iT}(t)H_{iT}(X,t). \quad (19)$$

Для вычисления коэффициентов диффузии *i*-й подсистемы на основе выражения (1) составим произведение $\Delta X_p \Delta X_l$, и применим к нему операцию условного математического ожидания при фиксированном значении вектора $X(t)$. При вычислении двойных интегралов, входящих в компоненты выражения для $M[\Delta X_p \Delta X_l \mid X(t)=X]$ возникает проблема с определением стохастических интегралов в смысле *К*. Ито или *Р*. Стратоновича. Ограничимся для решения инженерных задач определением Ито, так как по Стратоновичу результат получается более громоздкий. Итак, при использовании стохастических интегралов в несимметризованной форме получим [5]

$$M[\Delta X_p \Delta X_l \mid X(t)=X]=$$
$$=\sum_{k,q=1}^{ni} h_{pk}(X,t)h_{lq}(X,t)G_{нqk}(t)\Delta t+$$
$$+\sum_{k,q=1}^{ni} h_{Tpk}(X,t)h_{Tlq}(X,t)G_{Tqk}(t)\Delta t+$$
$$+\sum_{k,q=1}^{ni} h_{pk}(X,t)h_{Tlq}(X,t)G_{Tqk}(t)\Delta t+$$
$$+\sum_{k,q=1}^{ni} h_{Tpk}(X,t)h_{lq}(X,t)G_{Tqk}(t)\Delta t+0(t). \quad (20)$$

Разделив выражение (20) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, в соответствии с определением (5) получим формулу для *pl*-й компоненты матрицы диффузии *i*-й подсистемы.

$$B_{pl}(X,t)=\sum_{k,q=1}^{ni} h_{pk}(X,t)h_{lq}(X,t)G_{qk}(t)+$$
$$+\Delta B_{Tpl}(X,t), \quad (21)$$

где

$$\Delta B_{Tpl}(X,t)=\sum_{k,q=1}^{ni} h_{Tpk}(X,t)h_{Tlq}(X,t)G_{Tqk}(t)+$$
$$+\sum_{k,q=1}^{ni} h_{pk}(X,t)h_{Tlq}(X,t)G_{Tqk}(t)+$$
$$+\sum_{k,q=1}^{ni} h_{Tpk}(X,t)h_{lq}(X,t)G_{Tqk}(t). \quad (22)$$

В векторно-матричной форме формула для матрицы диффузии *i*-й подсистемы имеет вид

$$B_i(X,t)=H_i^T(X,t)G_i(t)H_i(X,t)+\Delta B_{iT}(X,t), \quad (23)$$

где выражение для топологической составляющей матрицы диффузии имеет вид

$$\Delta B_{iT}(X,t)=H_{iT}^T(X,t)G_{iT}(t)H_{iT}(X,t)+$$
$$+H_i^T(X,t)G_{iT}(t)H_{iT}(X,t)+ \quad (24)$$
$$+H_{iT}^T(X,t)G_{iT}(t)H_i(X,t).$$

Таким образом, выражения (18)–(19) и (23)–(24) определяют вектор сноса и матрицу диффузии *i*-й подсистемы сложной стохастической системы.

Вывод

Аналитически установлено, что для сложной стохастической системы векторы сноса и матрицы диффузии подсистем имеют аддитивные составляющие $\Delta A_{iT}(X,t)$ и $\Delta B_{iT}(X,t)$, определяемые взаимным влиянием подсистем и зависящие от топологических свойств системы. Для вычисления этих составляющих необходимо иметь достаточно точные и адекватные математические модели всех подсистем и каналов связей сложной системы и в реальном времени обрабатывать большой объем информации, решая при этом задачи идентификации. Однако с развитием информационных технологий эта проблема может быть решена, учитывая, что некоторые статистические характеристики подсистем (элементов) сложной системы могут быть получены экспериментально.

Литература

1. **Бусленко Н. П.** Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

2. **Пугачев, В. С.** Теория стохастических систем / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.

3. **Евланов Л. Г.**, Константинов В. М. Системы со случайными параметрами. – М.: Наука, 1976. – 568 с.

4. **Казаков И. Е.** Анализ систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев, В. А. Бухалев. – М.: Наука, 1993. – 270 с.

5. **Лобатый, А. А.** Топология мультиструктурных технических систем / А. А. Лобатый. – Минск: Военная академия Республики Беларусь, 2000. – 162 с.